

Semaine 3

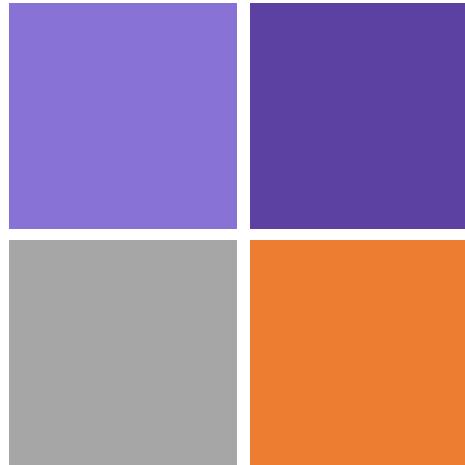
3D à 2D

Déformation

Effets thermiques

Densité d'énergie

1



Partie I: Contraintes et déformation relatives en 2D

1. Contraintes dans le plan
2. Déformations relatives dans le plan
3. Résumé

Partie II: Déformation

1. De 3D à 1D
2. Déformation axiale
3. Barres comme des ressorts

Partie III: Effets thermiques

1. Effets thermiques
2. Structures hyperstatiques

Partie IV: Densité d'énergie

1. Énergie de déformation relative
2. Résumé

Programme du cours

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Herbert Shea				
1	10.09	1. Intro des 3 enseignants 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	12.09	Contraintes 1D	x	Série 1
Danick Briand				
2	17.09	Contraintes	x	Série 1
2	19.09	Contraintes	x	Série 2
3	24.09	Déformation	x	Série 2
3	26.09	Déformation	x	Série 3
4	01.10	Transformation	x	Série 3
4	03.10	Transformation	x	Série 4
5	08.10	Torsion	x	Série 4
5	10.10	Torsion	x	Série 5
Herbert Shea				

Questions ?

Quizz Session: micro200

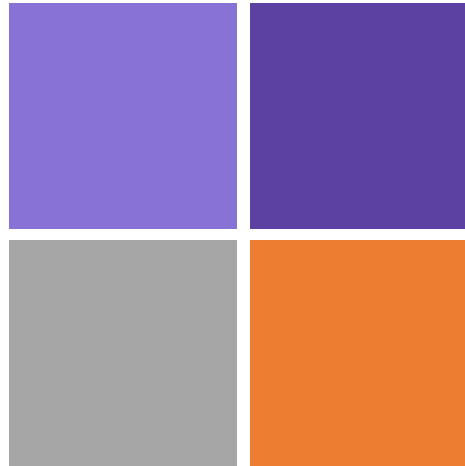


- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: danick.briand@epfl.ch

Semaine 3

Partie I:

Contraintes et Déformations relatives en 2D



1. Contraintes dans le plan
2. Déformations relatives dans le plan
3. Formuler des problèmes en 2D
4. Exemples
5. Résumé

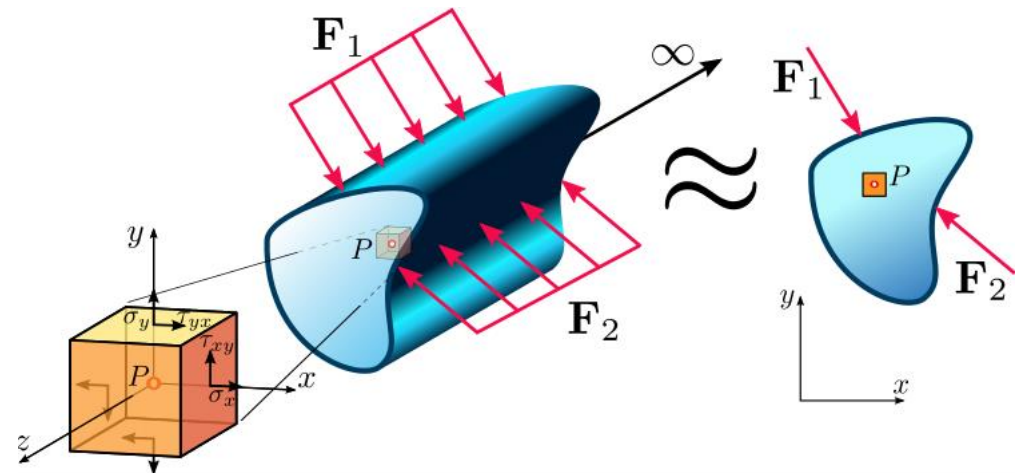
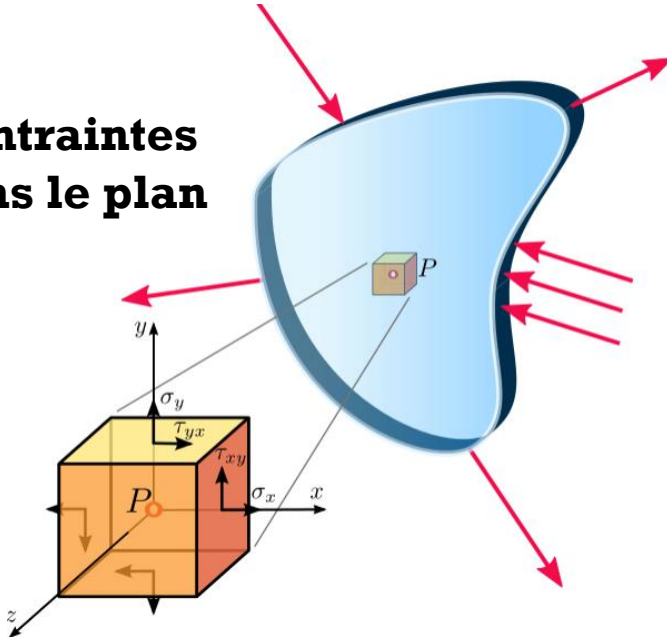
■ Contraintes et Déformation relatives en 2D

- Comprendre ce que sont les **contraintes et déformations relatives dans le plan**, en 2D
- Simplification de la **loi de Hooke généralisée en 2D**

Réduire les problèmes 3D en problèmes 2D

- Dans plusieurs cas, **selon la géométrie et les conditions aux frontières de l'objet**, par exemple déplacement restreint dans une direction, le problème 3D peut être réduit en un problème 2D

Contraintes dans le plan



Déformations relatives dans le plan

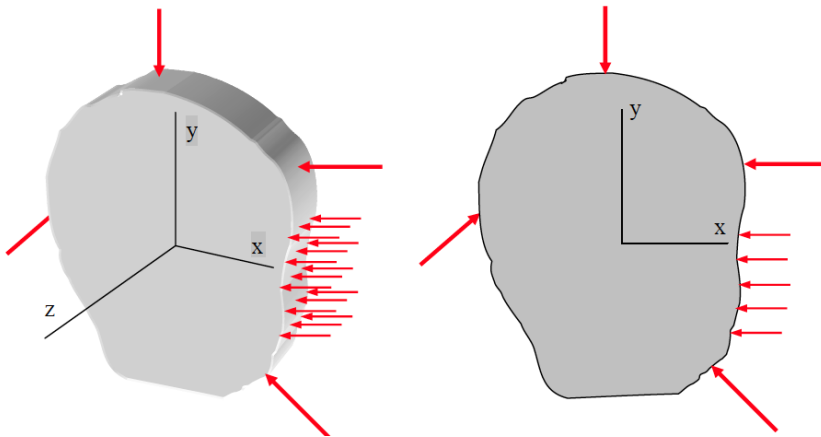
- Applicable si dans l'une des directions majeures, nous pouvons **couper des sections au travers de l'objet et la même distribution de contraintes ou déformations relatives pour chaque section**

Etat de contraintes dans le plan 2D

7

- Si une structure est **mince**: $dz \ll dx \text{ \& \& } dy$: Contraintes dans le plan
- Cela simplifie le problème 3D car: $\sigma_{zz} \approx \tau_{xz} \approx \tau_{yz} \approx 0$
- Seulement 3 composantes de contraintes restantes dans la matrice

Contraintes dans le plan:
Plaques / Membranes minces



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En pratique, le critère s'applique pour des structures ayant **une épaisseur au moins 10 fois plus petite que la largeur de leur section.**

Etat de contraintes dans le plan 2D

8

IMPORTANT

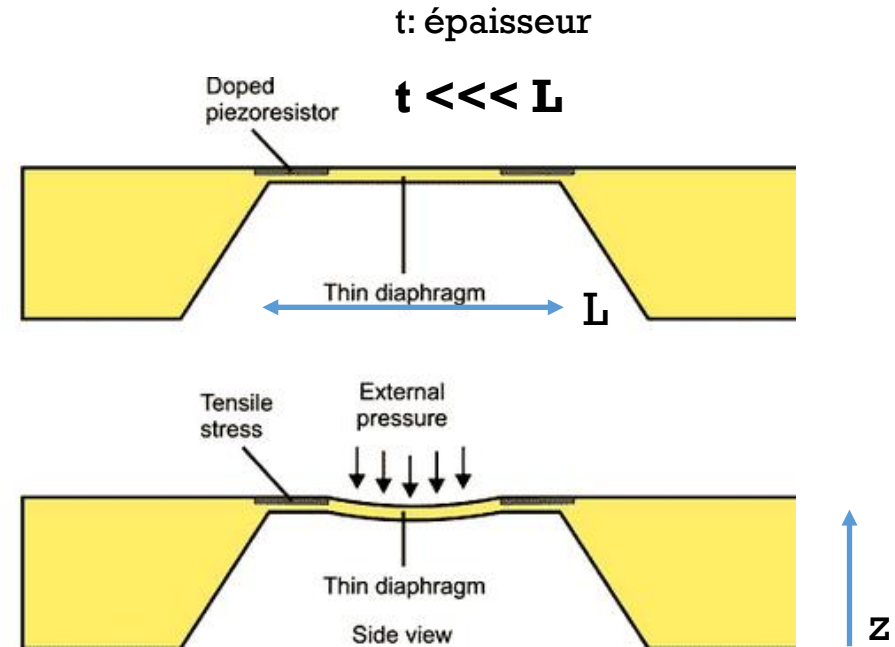
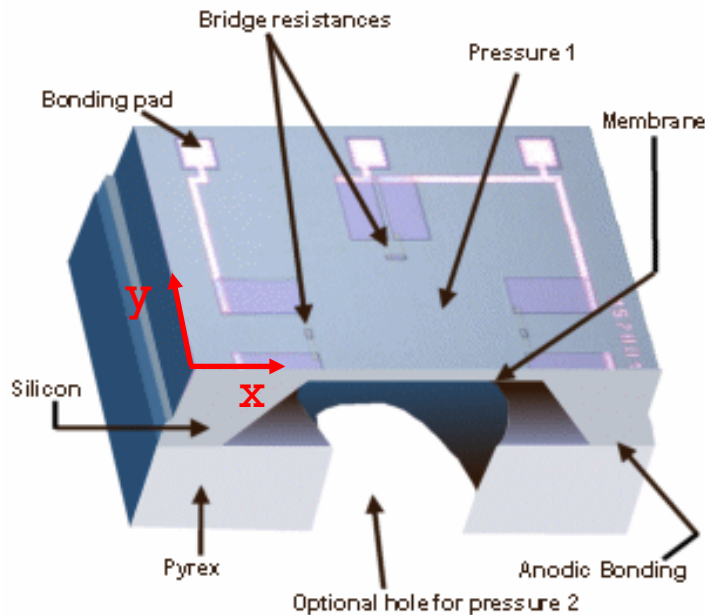
Etat de contraintes en 2D (x,y avec $\sigma_z = 0$)

- **Ne signifie PAS qu'il n'y a aucune force agissant dans le direction z.** En fait, des charges dans la direction z génèrent souvent de grandes contraintes dans la membrane (dans le plan x,y).
- **Ne signifie PAS que $w=0$ (pas de déformation dans la direction z).** En fait, la deformation selon l'axe des z est souvent plus large pour les structures à parois minces.
 - Les artères, où il y a des déformations substantielles, peuvent être considérées comme un système avec un état de contraintes en 2D (en coordonnées polaires)
 - Fabrication de MEMS : contraintes résiduelles dans des membranes minces de SiN/SiO peuvent induire leur large déformation

Etat de contraintes dans le plan 2D

9

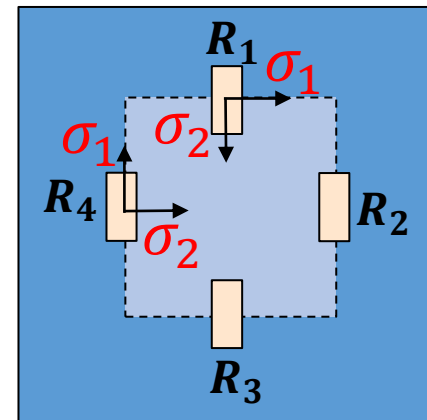
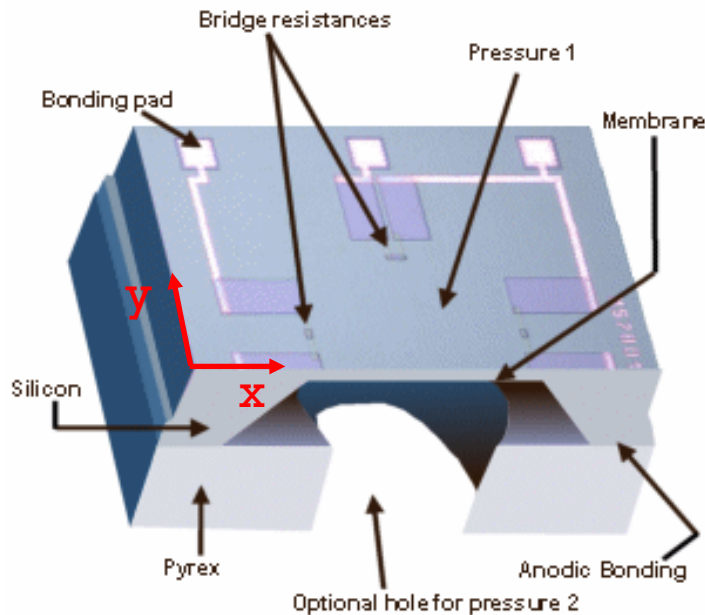
Exemple du capteur de pression



- Contrainte en z négligeable par rapport aux contraintes dans le plan en x, y , mais la pression appliquée occasionne une déformation en z de la membrane, avec donc $\epsilon_{zz} \neq 0$

Etat de contraintes dans le plan 2D

Exemple du capteur de pression



- Mais les contraintes sont localisées dans le plan x,y , σ_{zz} est **négligeable**
- Les jauges de contraintes piezorésistives sont placées aux extrémités de la membrane où la contrainte est maximale dans le plan x,y

Etat de contraintes dans le plan 2D

Les équations simplifiées

- Pour un état de contraintes dans le plan selon la direction-z ($\sigma_z=0$), les équations sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx})$$

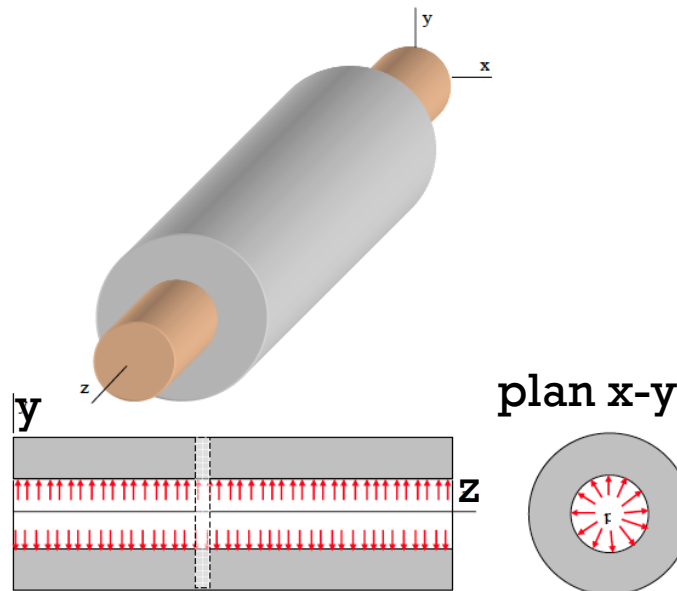
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Représentation d'un corps long prismatique

Dimension selon la direction z est beaucoup, beaucoup plus grande que celles dans les directions x et y : $L \gg x, y$

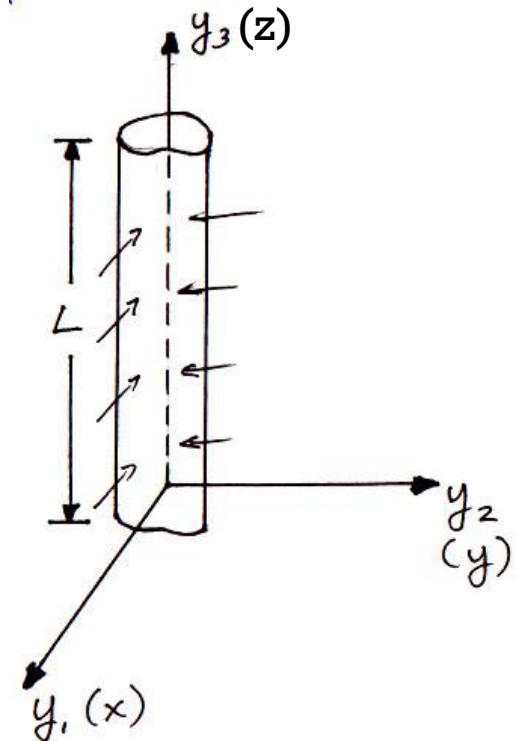
Déformations relatives dans le plan:
Structures épaisses/longues avec symétrie



Représentation d'un corps long prismatique

Dimension selon la direction z - est beaucoup, beaucoup plus grande que celles dans les directions x et y : $L \gg x, y$

- Etant donné que le corps est considéré comme infiniment long selon z , les charges importantes sont dans le plan x - y (rien en z) et ne changent pas selon l'axe z :
- Ce qui implique qu'il n'y a pas de gradient de déplacement selon z
- On considère u en $z = w = 0$



- L'état de **déformations relatives dans le plan** survient quand il n'y a pas de déformation probable ou possible dans une des directions
- Cet état survient souvent dans **des objets qui sont très longs dans une direction ET avec une charge uniforme sur ses sections le long de cette direction:**

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overleftrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Exemples d'états de déformations relatives dans le plan:
 - Tuyau long contenant un gaz pressurisé et fixé à ses extrémités
 - Un barrage résistant à un lac artificiel
 - ...



Déformations relatives dans le plan

15

IMPORTANT

- **Même si la Déformation relative selon 'z' est nulle, cela ne signifie PAS que la contrainte en 'z' est zéro.**

- En fait la contrainte selon l'axe des z est:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

De la matrice de souplesse: $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$

Contraintes et déformations relatives dans le plan

Résumé

Dans le plan	σ_x	σ_y	σ_z	ε_x	ε_y	ε_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
Contraintes	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0
Déf relatives	✓	✓	✓	✓	✓	0	✓	0	0

Résumé Partie I

Contraintes et déformations relatives dans le plan

Contraintes dans le plan

mince: $dz \ll dx$ & dy

$$\sigma_{zz} \approx \tau_{xz} \approx \tau_{yz} \approx 0$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

Déformations dans le plan

pas de déformation possible dans une direction (ici selon z)

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

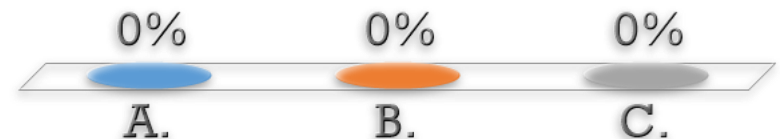
$$\overleftrightarrow{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

Dans le plan	σ_x	σ_y	σ_z	ε_x	ε_y	ε_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
Contraintes	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0
Déform. relatives	✓	✓	✓	✓	✓	0	✓	0	0

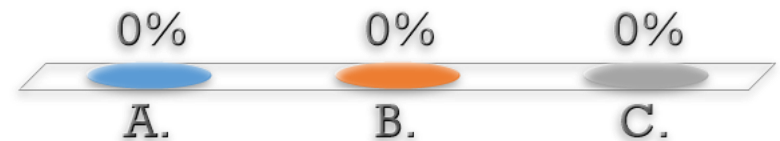
Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses



Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses



Contraintes ou Déformations relatives dans le plan?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformatives relatives dans le plan
- C. Aucune de ces réponses

Cylindrical vessel



Spherical vessel



Exemple 3.1

Matrice de souplesse

Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Déformations relatives}}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Contraintes}}}$$

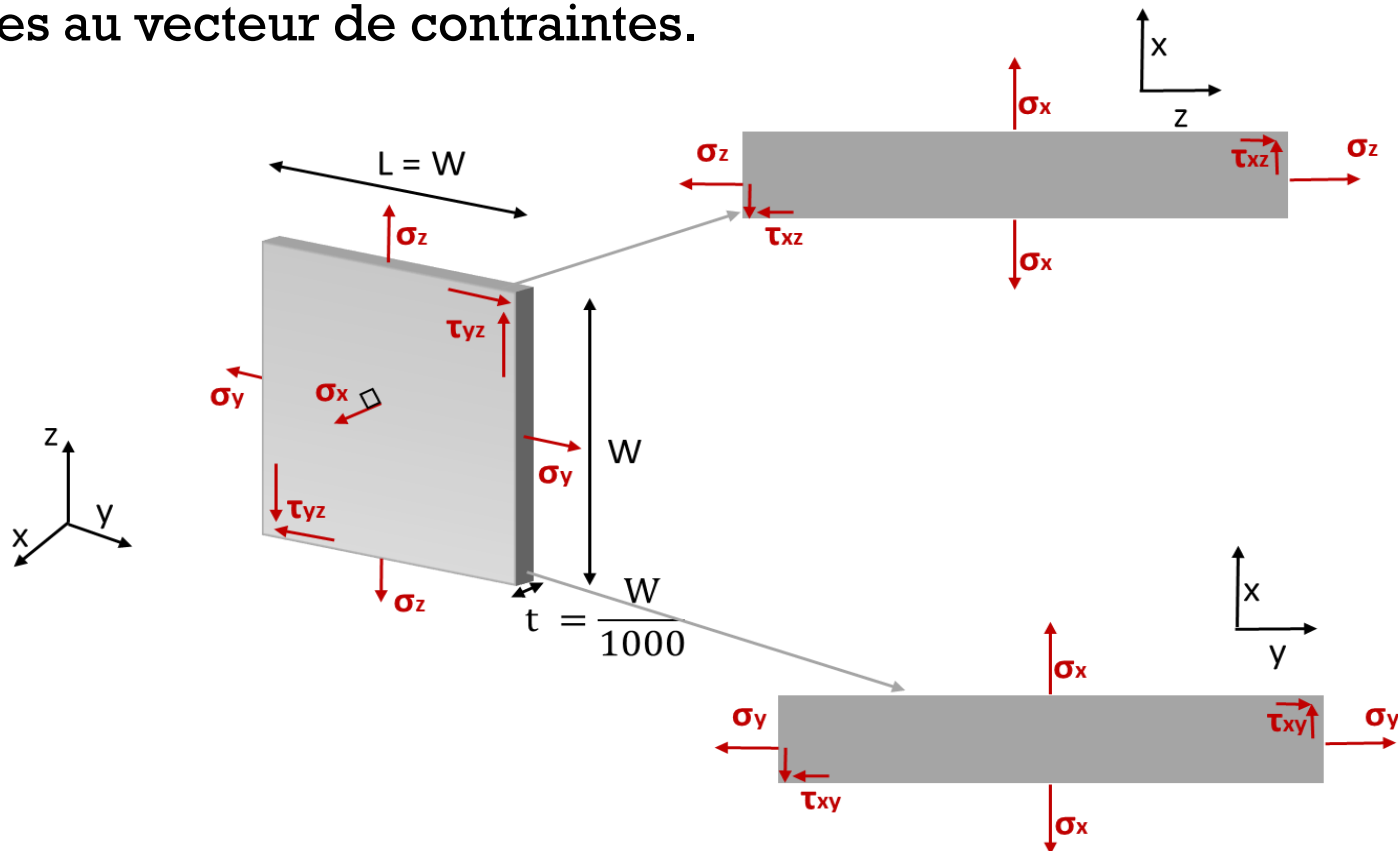
$(2(1+\nu)) = E / G$

Exemple 3.1

Matrice de souplesse

- Plaque mince avec les **composantes de la contrainte selon 'x'** nulles et coefficient de Poisson $\nu \neq 0$

A partir de la matrice de souplesse, relier le vecteur de déformations relatives au vecteur de contraintes.



Exemple 3.1

Matrice de souplesse

Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Déformations relatives}}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Contraintes}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(2(1+\nu)) = E / G$

Exemple 3.1

Matrice de souplesse

Simplification pour une plaque mince avec contraintes nulles selon 'x'

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} -\nu & -\nu & 0 \\ 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$(2(1+\nu)) = E / G$$

Déformation relative dans un Cube

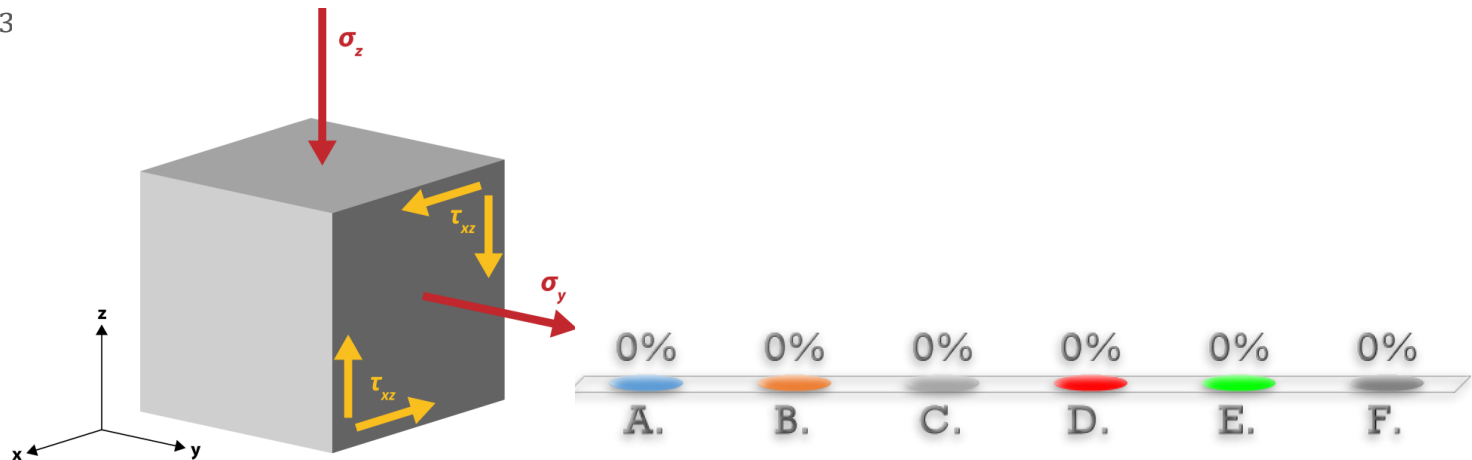
σ_z compressif à 200 MPa, σ_y en tension à 300 MPa. Contrainte de cisaillement τ_{xz} de 50 MPa.

Les autres composantes de la matrice de contraintes sont nulles.

Poisson's ratio $\nu = 0.25$, $E = 5$ GPa, $G = 2$ GPa.

Quelle est la déformation relative ε_{xx} selon l'axe des x ?

- A. $10 \cdot 10^{-3}$
- B. $-10 \cdot 10^{-3}$
- C. $5 \cdot 10^{-3}$
- D. $-5 \cdot 10^{-3}$
- E. $15 \cdot 10^{-3}$
- F. $-15 \cdot 10^{-3}$



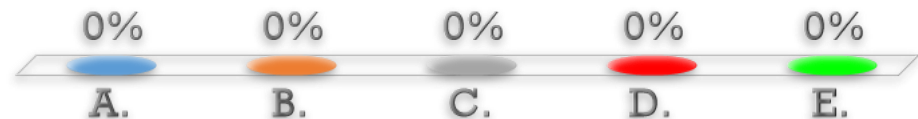
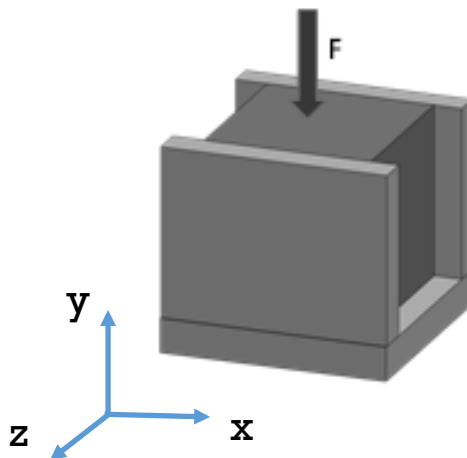
Déformation relative dans un Cube

30

Nous considérons: ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , et σ_x , σ_y , σ_z . où ϵ sont les déformations relatives normales et σ les composantes des contraintes normales.

Avec Coefficient de Poisson $\nu = 0.5$, quels paramètres sont nuls ($= 0$) ?

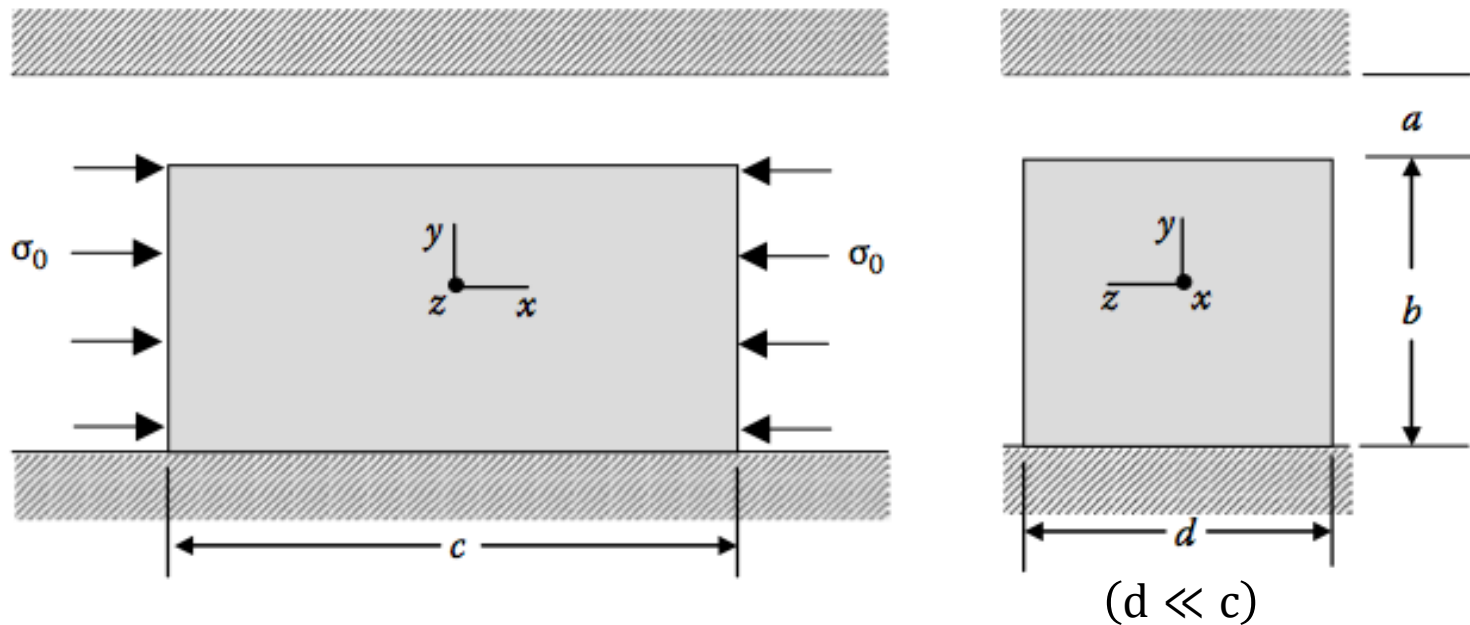
- A. ϵ_x , ϵ_z , σ_z
- B. ϵ_z , σ_x
- C. σ_x , σ_y
- D. ϵ_z , σ_y
- E. ϵ_y , ϵ_z



Exemple 3.2

Bloc entre deux murs

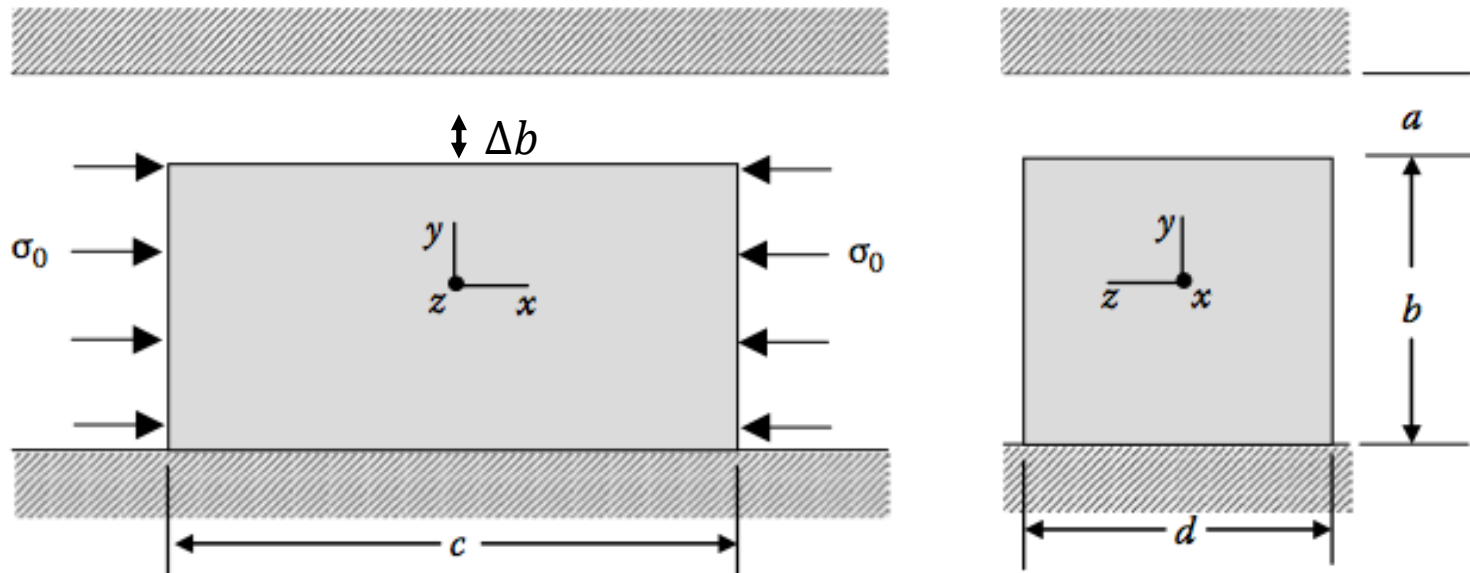
- Un bloc rectangulaire A est compris entre deux surfaces rigides avec un gap 'a'. Une contrainte uniforme σ_0 est appliquée selon l'axe x.
- (a) Déterminer la contrainte σ_{yy} avant et juste avant la fermeture du gap
- (b) La valeur minimale de σ_0 nécessaire pour fermer le gap avec $\sigma_{zz}=0$
- (c) Le changement de longueur selon l'axe 'x' quand le gap 'a' est fermé



Exemple 3.2

Bloc entre deux murs

- Contrainte dans la direction x : σ_0
- Génération d'une déformation en y due à l'effet Poisson
- Pour une valeur donnée σ_0 , déformation en y : $\Delta b = a$ (le gap entre le bloc et le mur)



Exemple 3.2

Bloc entre deux murs

- Pas de cisaillement, donc le problème n'a que 3 équations:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots \quad \begin{matrix} \sigma_z = 0 \\ \sigma_x = -\sigma_0 \end{matrix}$$

- Comme $\sigma_z = 0$ et $\sigma_x = -\sigma_0$:

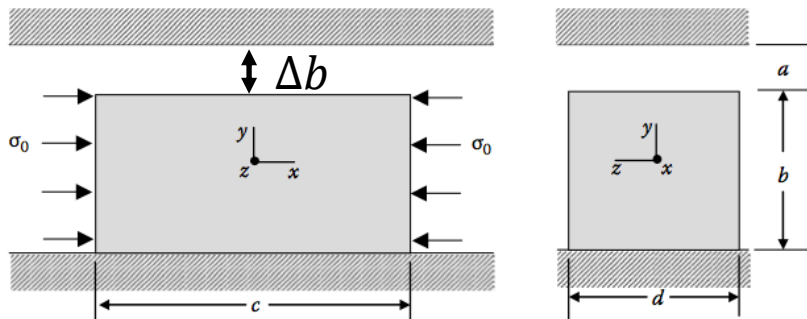
$$\varepsilon_y = \frac{\nu}{E} \sigma_0 + \frac{\sigma_y}{E} \rightarrow \sigma_y = E \varepsilon_y - \nu \sigma_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}$$

- Quand le gap est ouvert ($\Delta b < a$):

$$\sigma_y = 0$$

$$\& \quad \Delta b = \varepsilon_y b = \frac{\nu}{E} \sigma_0 b$$



Exemple 3.2

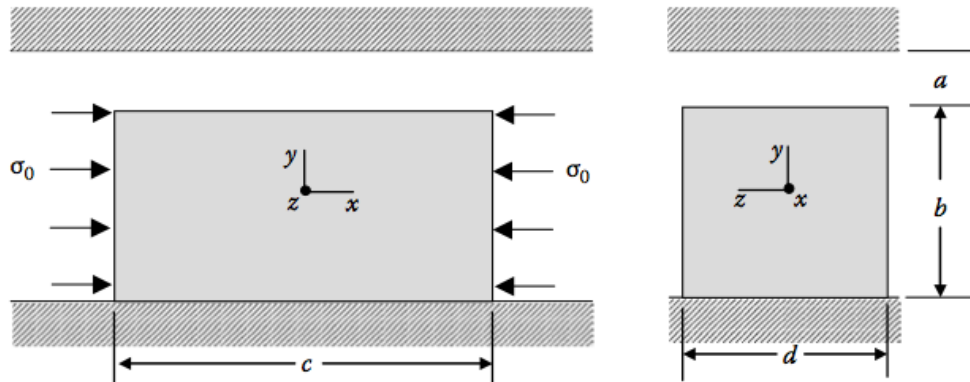
Bloc entre deux murs

- Au moment juste où le gap se ferme, mais sans s'appuyer au mur:

$$\Delta b = a, \quad \varepsilon_y = \frac{a}{b} \quad \& \quad \sigma_y = 0$$

$$\text{De } \sigma_y = E \frac{a}{b} - \nu \sigma_0 \quad \nu \sigma_0 = \frac{a}{b} E \rightarrow \sigma_0 = \frac{E a}{\nu b}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y = -\frac{1}{E} \left(\frac{E a}{\nu b} \right) = -\frac{1}{\nu} \frac{a}{b} \rightarrow \Delta c = \varepsilon_x \cdot c = -\frac{1}{\nu} \frac{a \cdot c}{b}$$



Exemple 3.2

Bloc entre deux murs

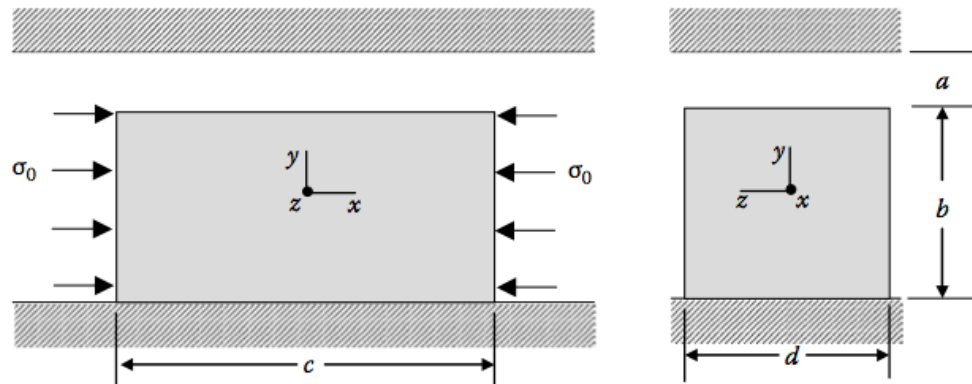
- Maintenant le bloc touche et pousse sur le mur en y (apparition d'une réaction)

Calculer la contrainte σ_y dans le matériau en fonction de σ_0 .

Sans mur cela signifie que nous avons $\varepsilon_{y,tot} > \frac{a}{b}$

Avec mur $\varepsilon_{y,tot} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{a}{b}$ $\varepsilon_{y,tot} = \frac{a}{b} = \varepsilon_{y,\sigma_x} + \varepsilon_{y,reaction}$

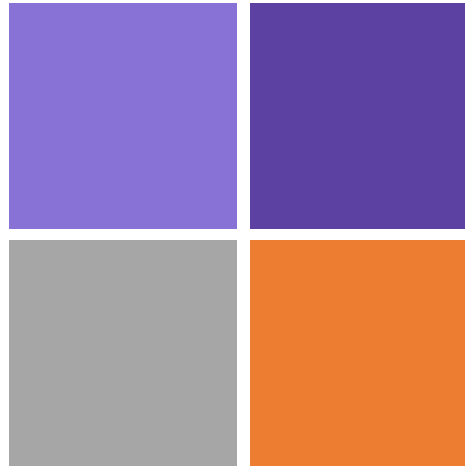
$$\varepsilon_{y,tot} = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{\sigma_y}{E} \quad \rightarrow \sigma_y = E\varepsilon_{y,tot} - \nu\sigma_0 \quad \rightarrow \sigma_y = E\frac{a}{b} - \nu\sigma_0$$



Semaine 3

Partie II:

Déformation

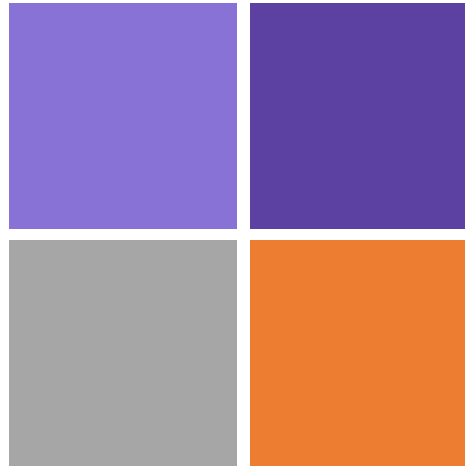


1. Déformation en 3D et en 2D
2. Equilibre en 3D, 2D et 1D
3. Déformation axiale
4. Barre comme un ressort

Relier
Contrainte & et Déformation relative
à la Déformation

- Calculer des déformations à partir de contraintes et déformations relatives
- Equilibre et déformation axiale en 3D, 2D & 1D
- Analogie barres - ressorts

Déformation en 3D et 2D



Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Déformations relatives}}} = \frac{1}{E} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}}^{\text{Matrice de souplesse}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{Contraintes}}}$$

$(2(1+\nu)) = E / G$

- La déformation relative volumétrique / le changement de volume peuvent être calculés:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ &= \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= \frac{1}{K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\end{aligned}$$

$$K = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

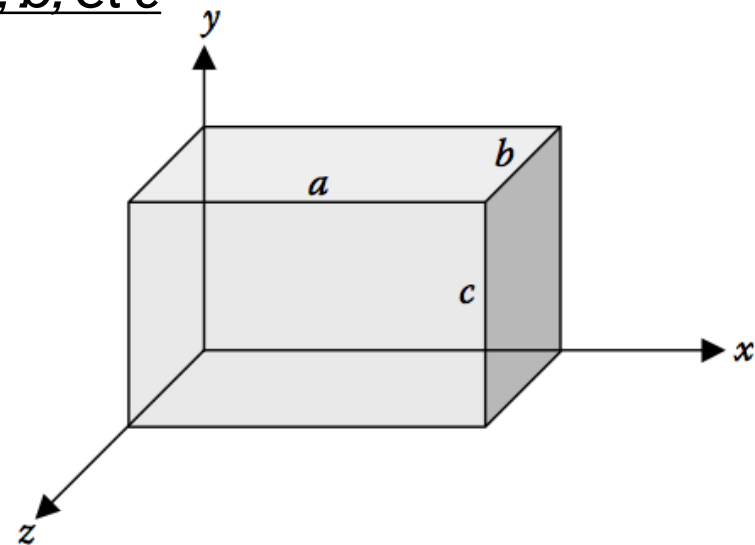
K est le module en volume du matériau. Il peut être calculé à partir des 2 composantes indépendantes E and ν .

Exemple Déformation 3D

Charge sur les 3 axes

- Un bloc rectangulaire de cuivre a les dimensions suivantes:
 $a = 200 \text{ mm}$, $b = 120 \text{ mm}$, and $c = 100 \text{ mm}$.
- Ce bloc est soumis à une charge triaxiale en équilibre comme suit:
 $\sigma_x = +2.40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -1.20 \text{ MPa}$, and $\sigma_z = -2.0 \text{ MPa}$.
- En assumant que les forces appliquées sont distribuées uniformément sur les faces respectives, déterminer:
 - les changements de dimensions selon a , b , et c

$E = 140 \text{ GPa}$ and $\nu = 0.35$.



Exemple Déformation 3D

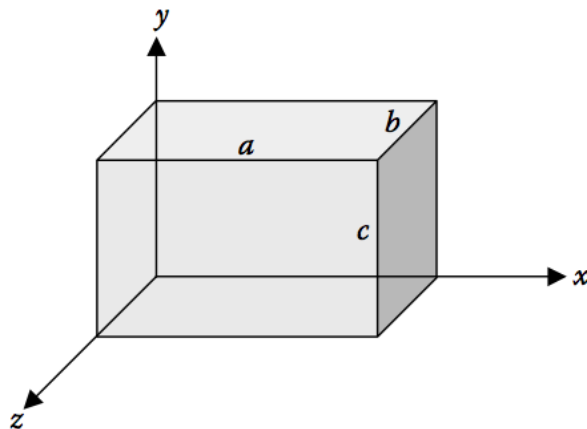
Charge sur les 3 axes

- Application de la loi de Hooke généralisée en utilisant la *matrice de Souplesse*.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

- Pas de contraintes en cisaillement, le problème peut se réduire à:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots$$



$$\varepsilon_x = \frac{2.40 \text{ MPa}}{140 \text{ GPa}} - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-1.20 \text{ MPa}) - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-2.0 \text{ MPa})$$

$$\varepsilon_x = 25.14285714 \cdot 10^{-6}$$

Exemple Déformation 3D

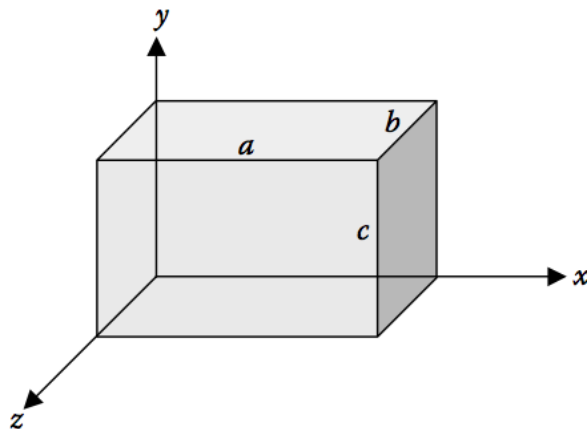
Charge sur les 3 axes

- We start from the Generalized Hooke's Law, using *Compliance Matrix*.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

- Because no shear load is applied the problem is reduced to:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z; \dots$$



$$\varepsilon_x = \frac{2.40 \text{ MPa}}{140 \text{ GPa}} - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-1.20 \text{ MPa}) - \frac{0.35}{140 \text{ GPa}} (-2.0 \text{ MPa})$$

$$\varepsilon_x = 25.14285714 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_x = 25 \cdot 10^{-6}$$

Exemple Déformation 3D

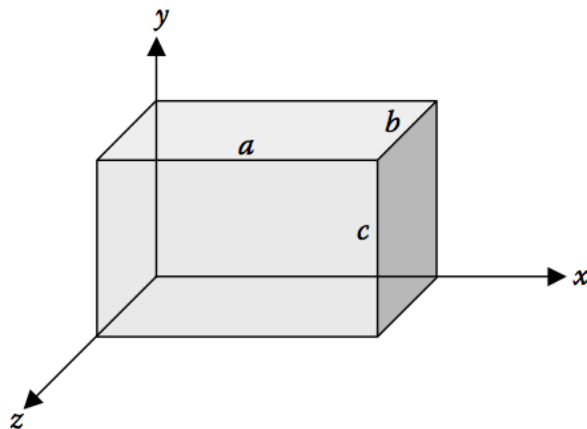
Charge sur les 3 axes

- En appliquant les mêmes types d'équations pour les autres directions.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z \rightarrow \varepsilon_y = -9.57148 \cdot 10^{-6} = -9.6 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \rightarrow \varepsilon_z = -17.2857 \cdot 10^{-6} = -17 \cdot 10^{-6}$$

- En utilisant la définition de la déformation relative:



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a} \rightarrow \Delta a = a \cdot \varepsilon_x = -5.0 \mu\text{m}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \varepsilon_y = \frac{\Delta c}{c} \rightarrow \Delta c = c \cdot \varepsilon_y = -0.96 \mu\text{m}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta b}{b} \rightarrow \Delta b = b \cdot \varepsilon_z = -2.0 \mu\text{m}$$

Déformation en 2D

À partir des déformations relatives

Contraintes dans le plan

mince: $dz \ll dx$ & dy

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \neq 0$$

Déformations dans le plan

**pas de déformation possible
dans une direction**

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Example 3.3

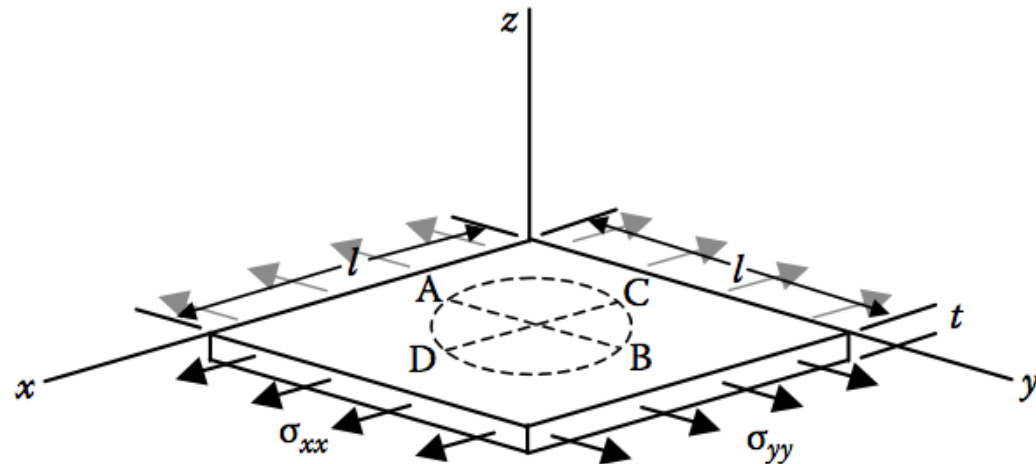
Déformation avec contraintes dans le plan

- Un cercle de diameter 'd' est inscrit sur une plaque de métal carré (Module de Young E et coefficient de Poisson ν) d'épaisseur t et de côté l .
- Si la plaque est soumise à des contraintes dans le plan
 $\sigma_{xx} = 82.7 \text{ MPa}$ et $\sigma_{yy} = 137.8 \text{ MPa}$,

avec $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.30$, $t = 2.00 \text{ cm}$, et $l = 40.0 \text{ cm}$

Trouver les changements:

- De la longueur du diamètre AB ;
- De la longueur du diamètre CD ;
- De l'épaisseur de la plaque;
- Du volume de la plaque.



Example 3.3

Déformations avec contraintes dans le plan

- Comme $t \ll l$, nous pouvons appliquer l'état de contraintes dans le plan
- En utilisant la matrice de souplesse:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

Example 3.3

Déformations avec contraintes dans le plan

- Une fois les déformations relatives connues, nous pouvons calculer:

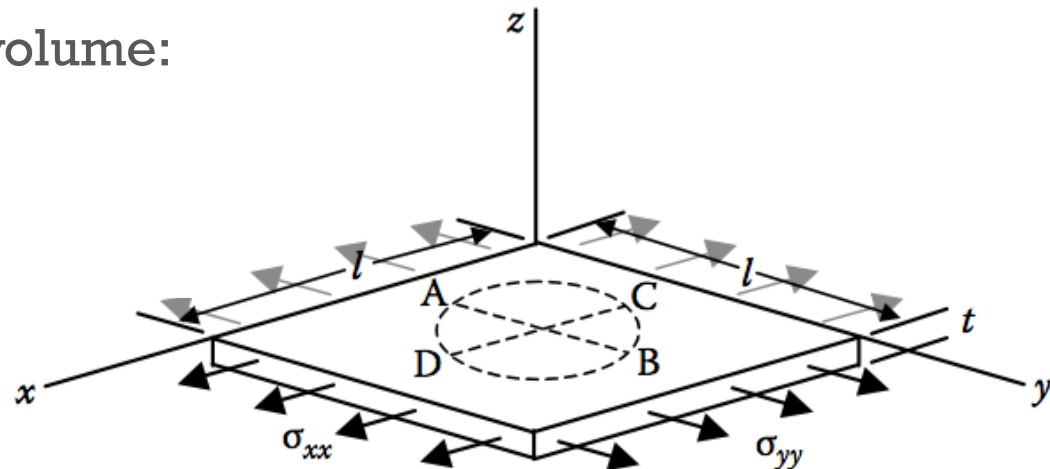
$$\Delta \overline{AB} = \varepsilon_{yy} \cdot \overline{AB} = d \cdot 0.56 \cdot 10^{-3} \qquad \Delta \overline{CD} = \varepsilon_{xx} \cdot \overline{CD} = d \cdot 0.21 \cdot 10^{-3}$$

- Puis pour la direction verticale (Contraintes dans le plan $\sigma_z = 0$):

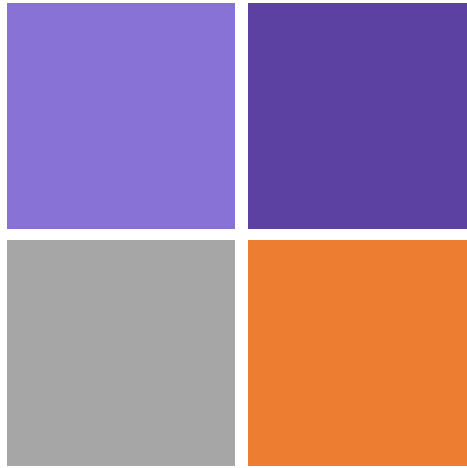
$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx})$$

- Et pour le changement de volume:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$



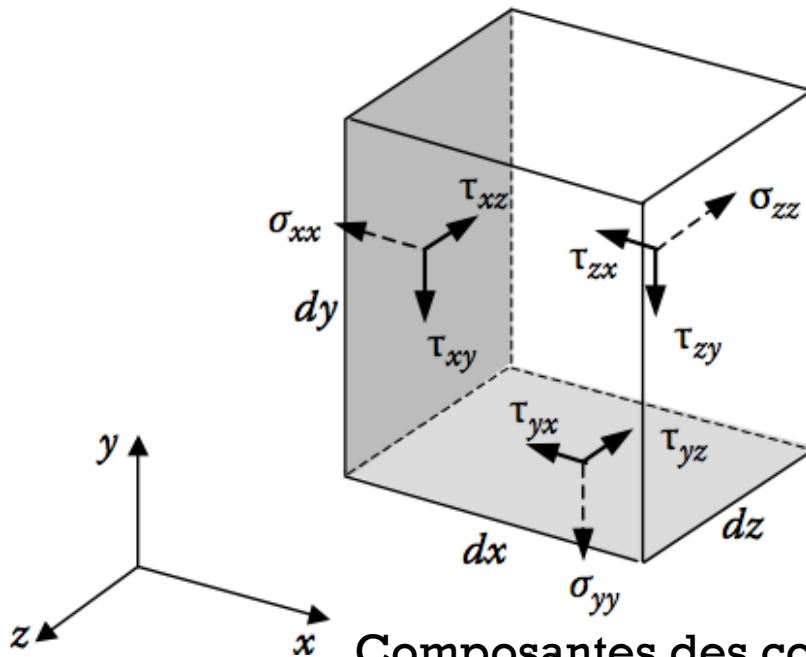
Equations d'équilibre en 3D, 2D et 1D



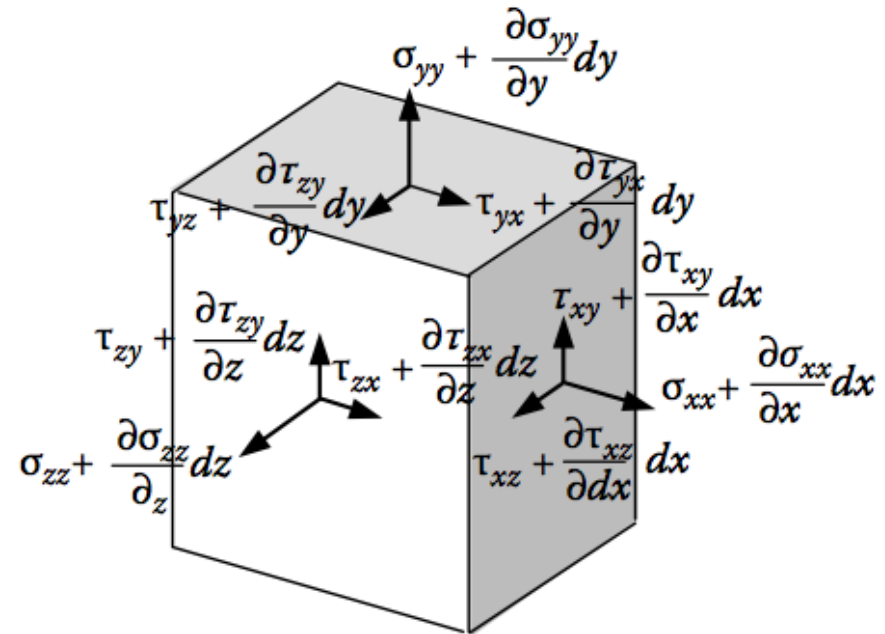
Equilibre en 3D

Equation microscopique d'équilibre

- On commence par définir les équations microscopiques d'équilibre.
- Rappel: 1^{er} indice dénote le vecteur normal du plan, 2^{ème} indice représente la direction du vector de force / contrainte.



Composantes des contraintes sur les faces de gauche, de dessous et arrières



Composantes des contraintes sur les faces droite, du dessus et avant

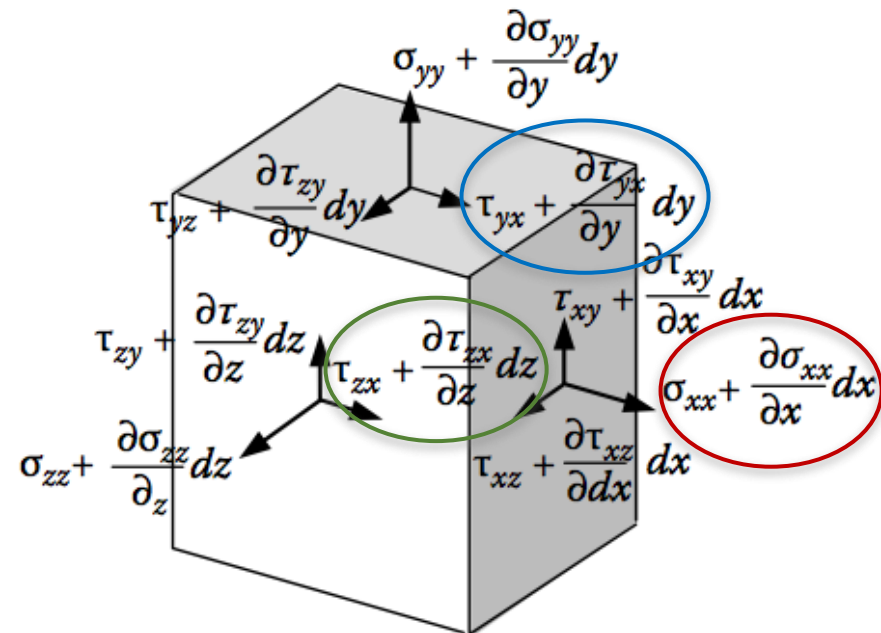
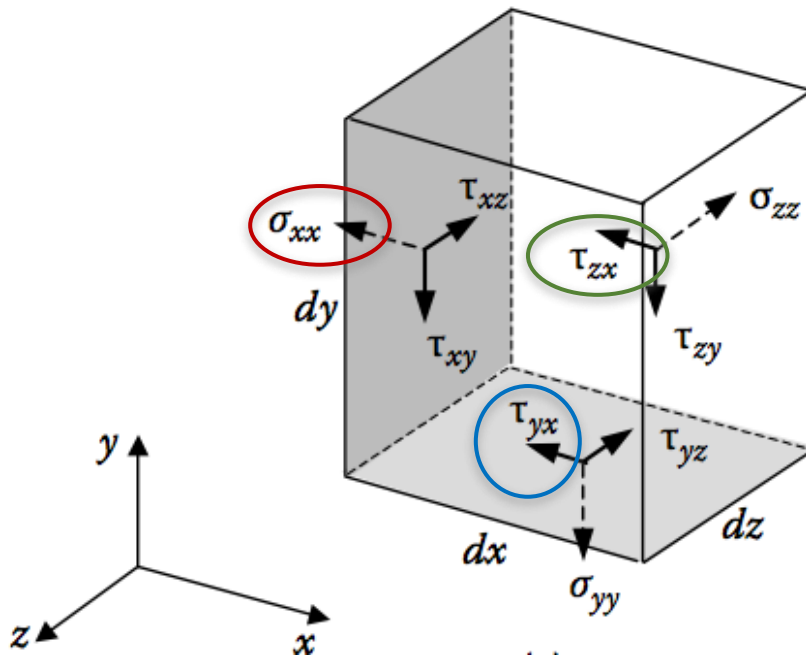
Equilibre en 3D

Equation microscopique d'équilibre

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \rightarrow & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx dz + \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz - \tau_{xz} \right) dx dy + B_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

B_x : Force en volume (N/m³)
(i.e. gravité)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0$$



Equilibre en 3D

Somme de toutes les forces

- Les forces dans la direction-x proviennent des contraintes sur CHACUNE des six faces
- Somme de tous les éléments qui agissent selon x, y et z:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z = 0$$

- Ce sont les 3 équations d'équilibre

Equilibre en 3D

Notation indicielle

- Ces 3 équations peuvent être réduite à une avec une notation indicielle:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} &:= \left(\right)_{,i} & \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 \\
 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &:= \left(\right)_{,ii} := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} & \mathbf{y} &= \mathbf{x}_2 \\
 & & \mathbf{z} &= \mathbf{x}_3 \\
 \left(\right)_{i,i} &= \frac{\partial(\)_i}{\partial x_i} := \sum_i \frac{\partial(\)_i}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

- Nous pouvons écrire les 3 équations d'équilibre sous la forme:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z &= 0\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Équation d'équilibre

Équation constitutive

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

Équation cinématique

Formuler des problèmes en 2D

Equilibre en terme de déplacement – *Contraintes 2D*

- Et nous pouvons aussi exprimer l'équation d'équilibre dans l'état de contraintes dans le plan en terme de déplacement:

$$G \nabla^2 u + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_x = 0$$

$$G \nabla^2 v + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_y = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Réduction d'un problème 3D à 1D

- Si nous avons une barre avec une charge axiale seule σ_{xx} :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

- Les équations se simplifient énormément:

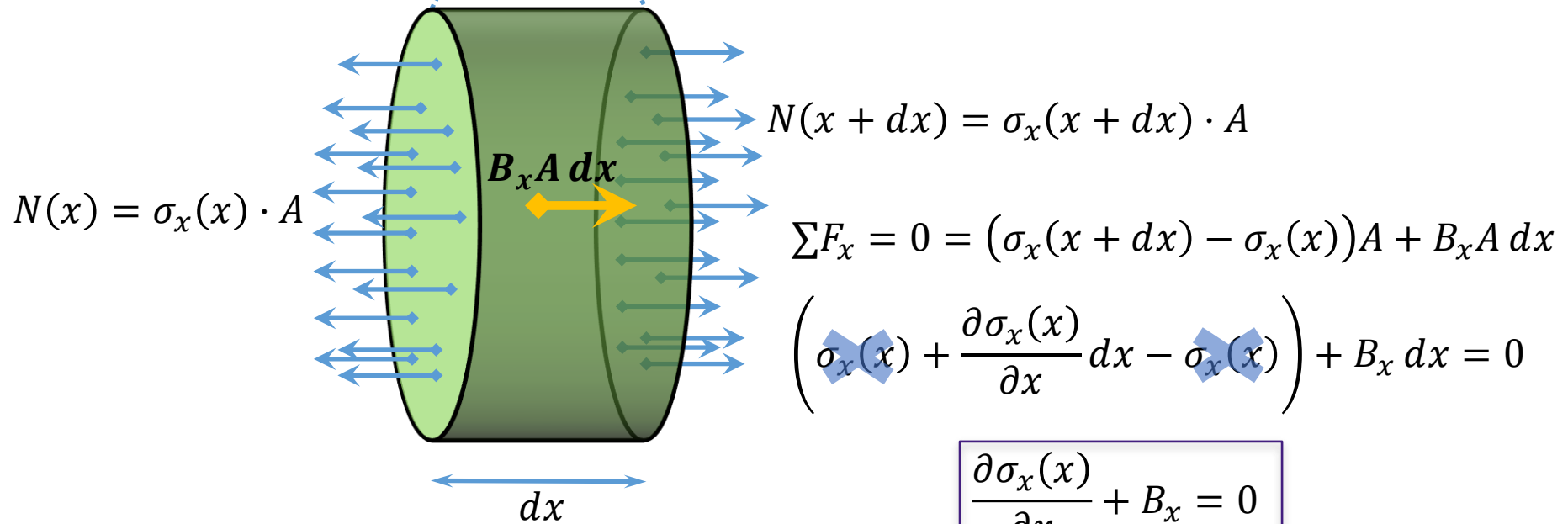
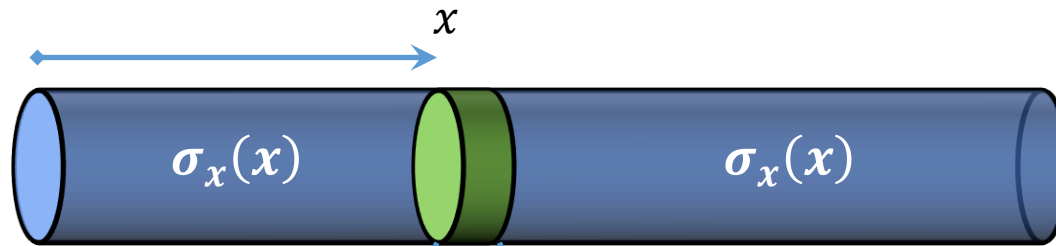
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z &= 0\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + B_x = 0$$

Equilibre en 1D

Equation microscopique

60



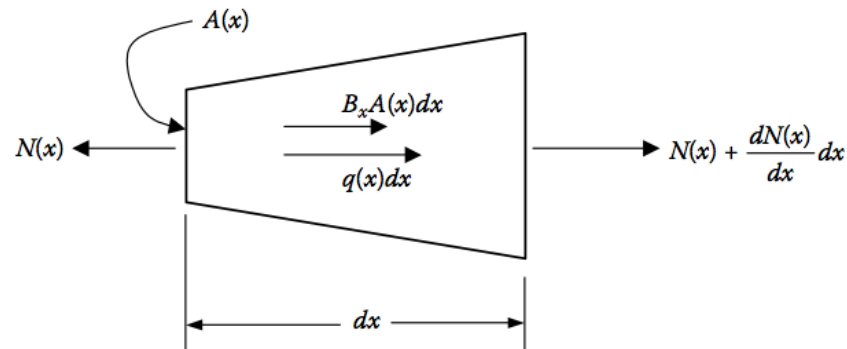
$$\frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} + B_x = 0$$

Analyse de l'équilibre microscopique

En 1D

61

- Calcul de la contrainte à un point arbitraire d'une structure agissant sur un élément infinitésimal $dV=A(x)dx$
- La force axiale *interne* $N(x)$ équilibre les deux types de forces *externes* (charge axiale distribuée $q(x)$, et force axiale en volume B_x)



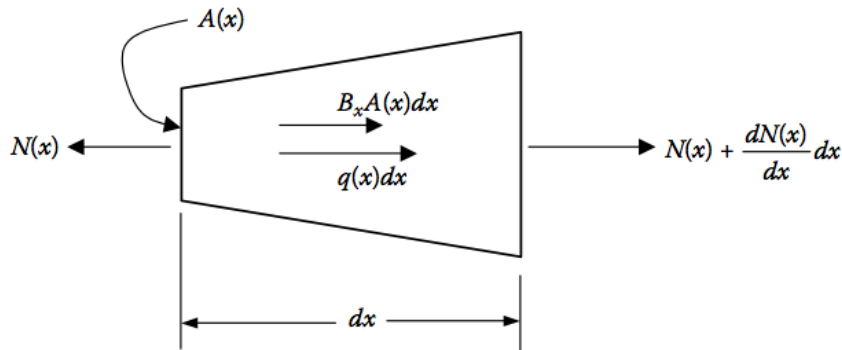
$q(x)$: force axiale distribuée (N/m)

B_x : force par volume (N/m³)

$$\left\{ N(x) + \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx \right\} - N(x) + q(x)dx + B_x A(x)dx = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

Equation d'équilibre en 1D

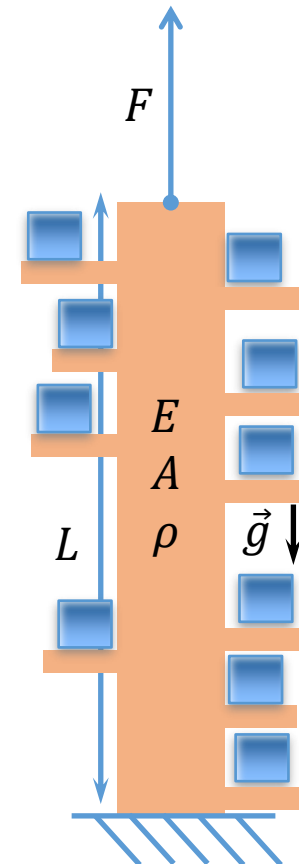


$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

$N(x)$: Force interne

B_x : Force en volume (N/m^3)
(i.e. gravité, champ électromagnétique)

$q(x)^*$: Charge axiale distribuée (N/m)

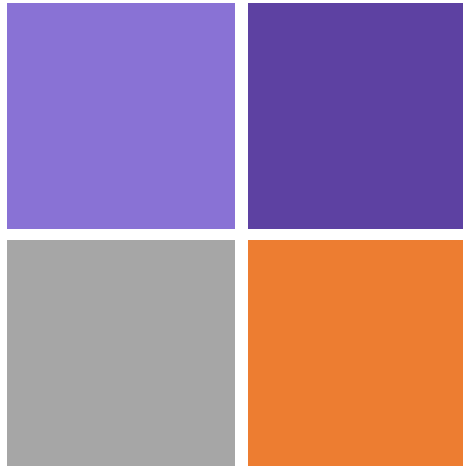


B_x relié à la gravité (ρ)

$q(x)$ relié à des masses en extra

* Pour la partie axiale du cours, $q(x)=0$

Déformation axiale



Relier Contrainte & Déformation relative à la Déformation



- Que se passe-t-il lorsque l'on presse sur la gomme à effacer ?
- Pourquoi la réponse est-elle différente si l'on presse sur la gomme à plat ou sur son côté ?

- Si nous avons une barre avec une charge axiale:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

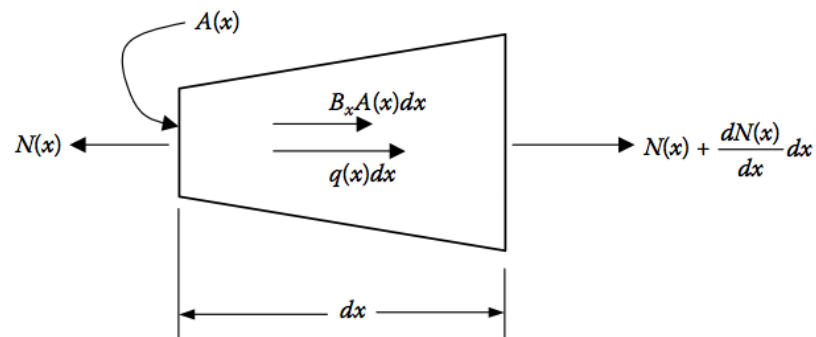


- Les équations se simplifient énormément:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + B_x = 0 \rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} + B_x A(x) = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$



$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx}$$

$$u(x) - u(0) = \int_0^x \varepsilon_{xx}(x') dx'$$

Déplacement dans une barre chargée axialement

- Nous utilisons les trois équations pour dériver l'extension générale dans la barre, **le déplacement $u(x)$** :
- Ensemble avec l'équation d'équilibre et la loi de Hooke, nous exprimons l'équation d'équilibre en fonction de **$u(x)$** :

$$\sigma = E\varepsilon = E \left(\frac{du(x)}{dx} \right)$$

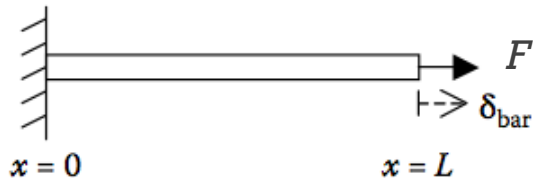
$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + B_x = 0}$$

Sans charge distribuée et avec E et A constants

$q(x)$: charge distribuée = 0 et l'équation d'équilibre est divisée par A

Déplacement dans une barre chargée axialement

- Le cas particulier d'une barre fixée à une extrémité et tirée avec une force F . Nous résolvons l'équation d'équilibre:



body force ($B_x = 0$):
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

- Conditions aux frontières: $u(0)=0$ et $\frac{du(L)}{dx} = \varepsilon(L) = \frac{\sigma(L)}{E} = \frac{N(L)}{AE}$

avec solution:

$$u(x) = C_1 x + C_2 \quad u(x) = u(0) + N(L) \cdot x / AE$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad u(x) = N(L) \cdot x / AE$$

- Nous trouvons l'expression de l'allongement total:

$$\delta = u(L) - u(0) = \frac{N(L)}{AE} \cdot (L - 0) = \frac{NL}{AE}$$

1. Définir la charge interne

- Définition de la contrainte

$$\sigma \equiv \frac{N}{A}$$

2. Relier la contrainte à la déformation relative

- Loi de Hooke reliant contrainte et déformation relative $\sigma = E \cdot \varepsilon$

3. Caractériser la déformation d'un matériau continu

- Définition cinématique de la déformation relative / déformation

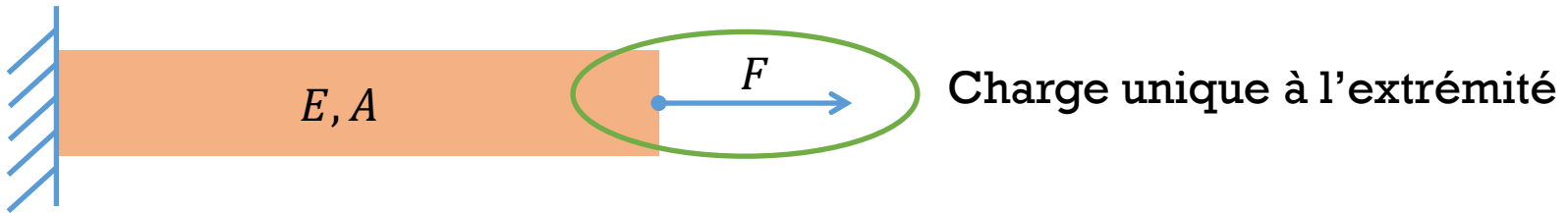
$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \longrightarrow \text{pour calculer } u(x)$$

4. Assurer que le corps est en équilibre

$$\frac{dN(x)}{dx} + q(x) + B_x A(x) = 0$$

Traitement des corps comme des ressorts

69



Pour **A** et **E** constants, nous pouvons écrire:

	Spring	Axially loaded bar
Hooke's Law	$F = k \cdot \Delta x$	$F = \frac{AE}{L} \delta$
Spring constant	k	$k = \frac{AE}{L}$

■ Rigidité k

$$k = \frac{AE}{L} \qquad F = k \cdot \Delta$$

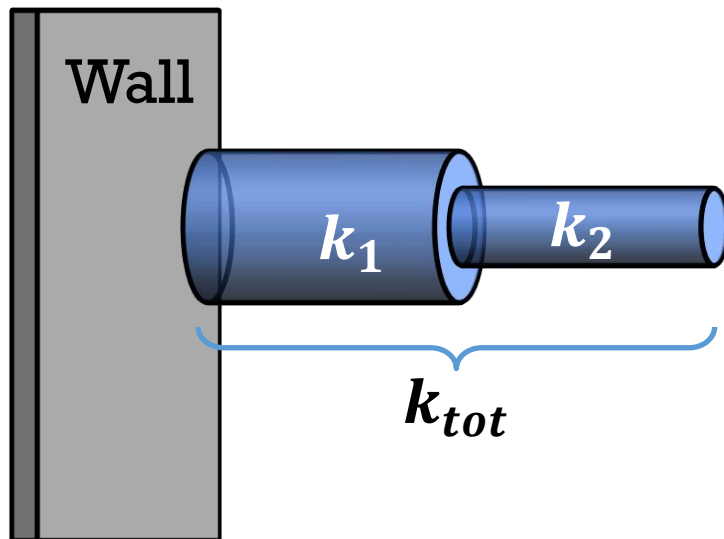
with $\Delta = \delta$

■ Souplesse f

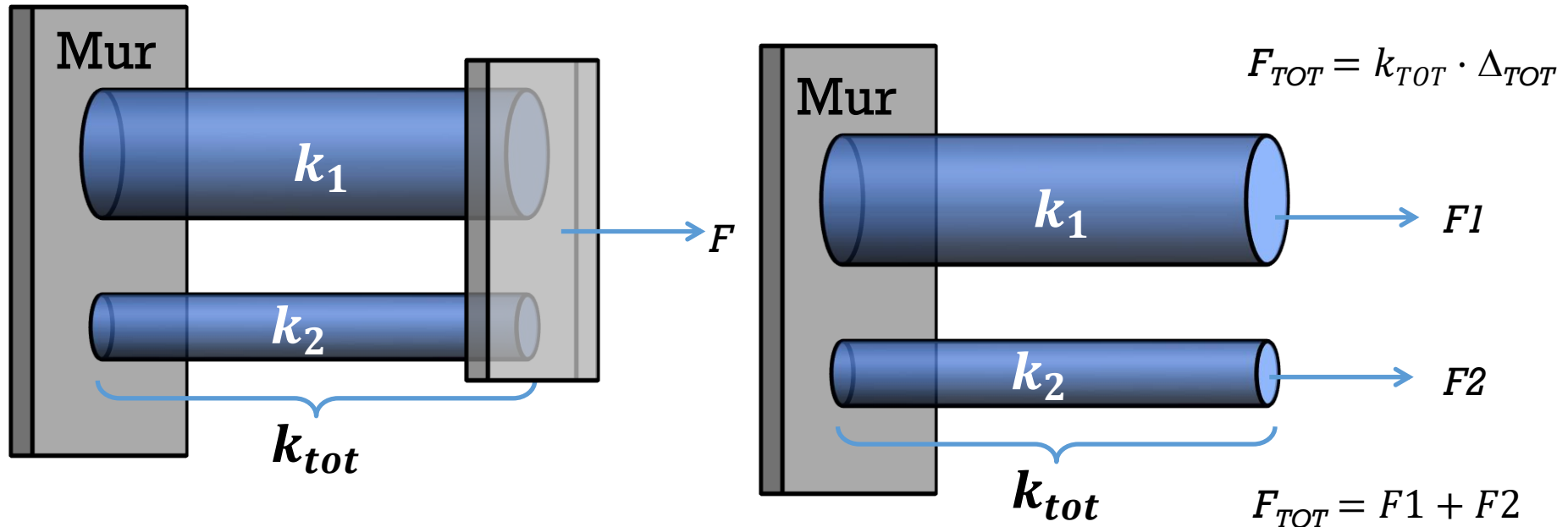
$$f = \frac{1}{k} = \frac{L}{AE} \qquad \Delta = f \cdot F$$

k_{tot} pour cette structure ?

- A. $k_{tot} = k_1 + k_2$
- B. $k_{tot} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$
- C. $k_{tot} = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$



Barres en parallèle



$$\Delta_{TOT} = \Delta_1 = \Delta_2 = F_1 / k_1 = F_2 / k_2 \quad \begin{aligned} F_1 &= k_1 \Delta_{TOT} \\ F_2 &= k_2 \Delta_{TOT} \end{aligned}$$

$$F_{TOT} = F_1 + F_2 = k_1 \Delta_{TOT} + k_2 \Delta_{TOT} = (k_1 + k_2) \Delta_{TOT}$$

$$k_{TOT} = k_1 + k_2$$

Résumé Partie 2

75

Déformation axiale

- Loi de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

- Déformation d'une barre chargée axialement avec une section uniforme A et E constant:

$$\delta = \frac{NL}{AE}$$

$$N = F = \frac{AE}{L} \delta$$

$$\frac{AE}{L} : \text{rigidité 'k'}$$

- Déformation relative d'une barre chargée axialement avec des paramètres non constants:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{A(x) E(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{A(x) E(x)} dx$$

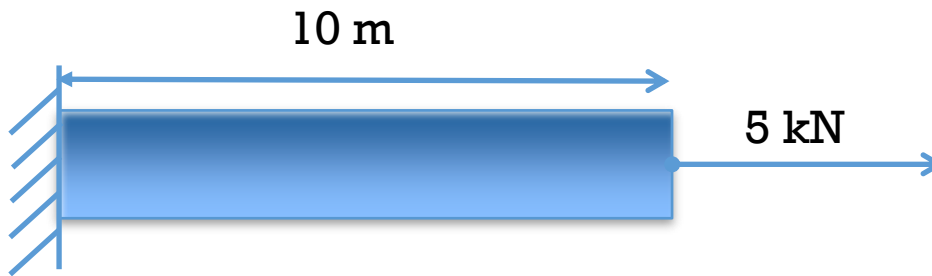
Exemple 3.4

Allongement d'une barre d'acier

Une barre circulaire de 10 m de longueur utilisée dans un mécanisme de contrôle doit transmettre une force en traction de 5 kN avec un allongement maximal de 3 mm et une contrainte n'excédant pas 150 MPa.

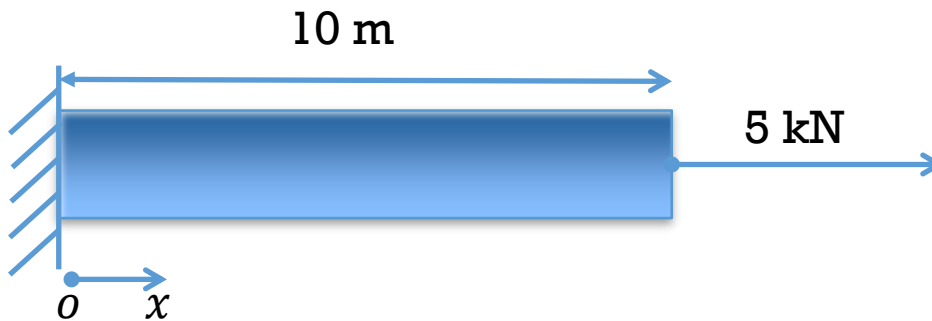
Quel doit être le rayon minimal de la barre ?

$$E = 200 \text{ GPa}$$



Exemple 3.4

Allongement d'une barre d'acier



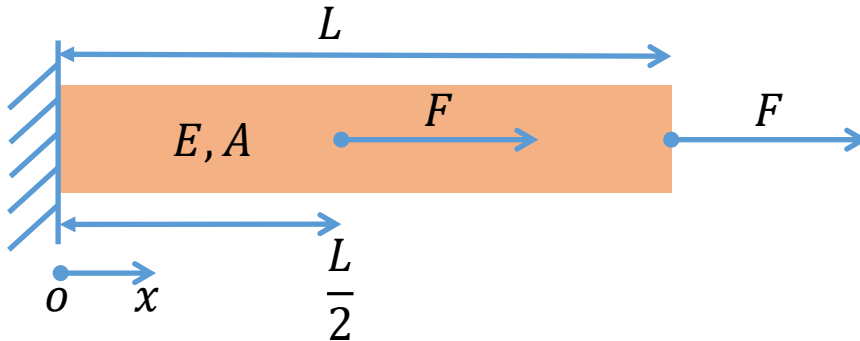
$$\sigma_{M,permis} = 150 \text{ MPa}; \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \rightarrow A_{min,\sigma} = \frac{5 \text{ kN}}{\sigma_{M,permis}} = \frac{1}{3} 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\delta_{M,permis} = 3 \text{ mm}; \delta = \frac{F}{k} = \frac{L}{AE} F \rightarrow A_{min,\delta} = \frac{5 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m}}{200 \text{ GPa} \cdot \delta_{M,permis}} = \frac{5}{6} 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{min,\delta} > A_{min,\sigma} \rightarrow r_{min} = \sqrt{\frac{A_{min,\delta}}{\pi}} = 0.52 \text{ cm}$$

Exemple 3.5

Allongement avec 2 forces



Segments ne sont pas des Sections !!!

$$N = k\delta$$

Approche: Séparation de la structure en 2 segments

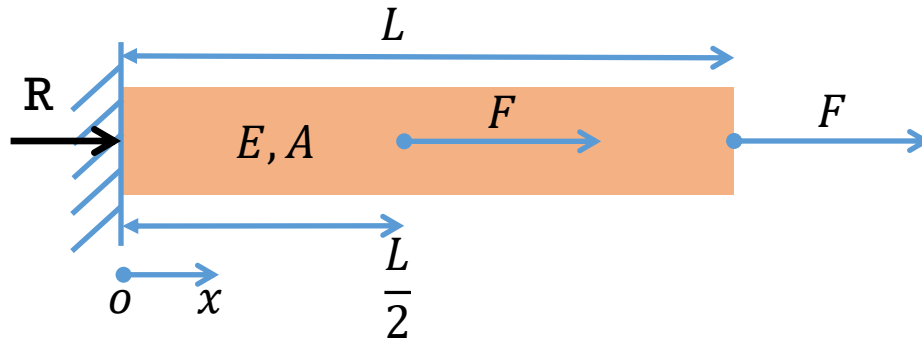
Calcul de l'allongement pour chacun des segments

Etape 1: **Méthode des sections** pour trouver les **forces internes «N»** dans chacun des segments

Etape 2: Calculer la **déformation axiale** en relation avec la constante de ressort de chacun des segments

Exemple 3.5

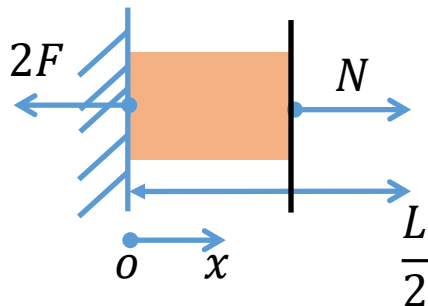
Allongement avec 2 forces



Réaction: $R + 2F = 0$
 $R = -2F$

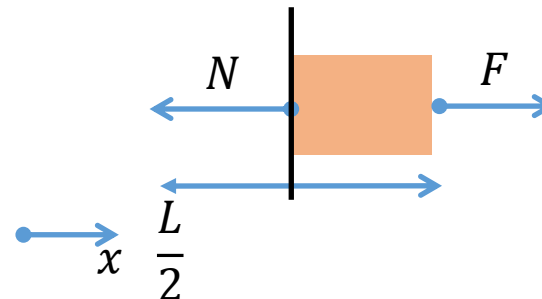
Etape 1: Méthode des sections pour trouver les forces internes dans chaque **segment**

Segment 1



$N = 2F$

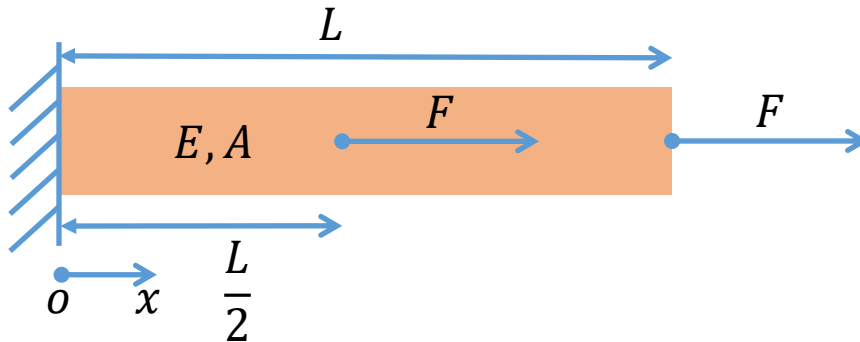
Segment 2



$N = F$

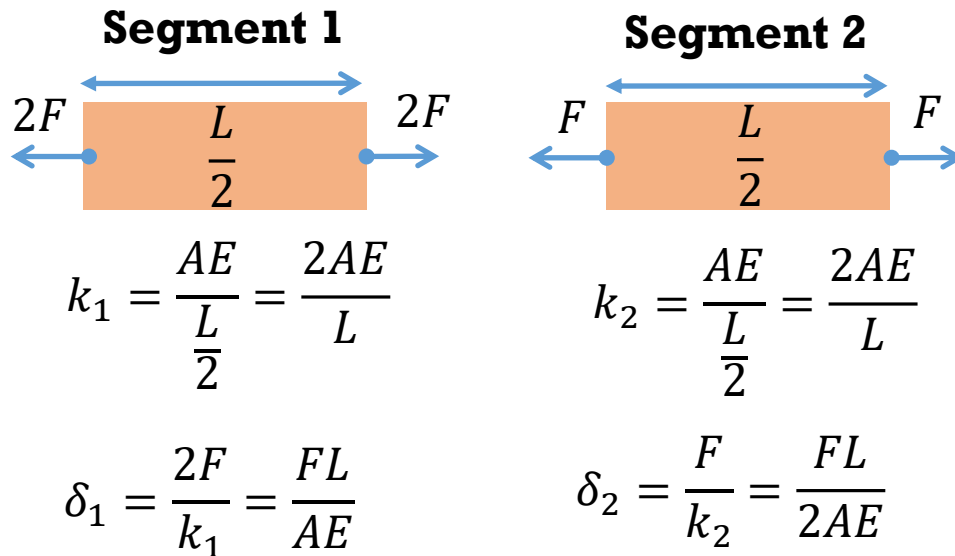
Exemple 3.5

Allongement avec 2 forces



$$N = k\delta$$

Etape 2: Déformation axiale dans chaque segment

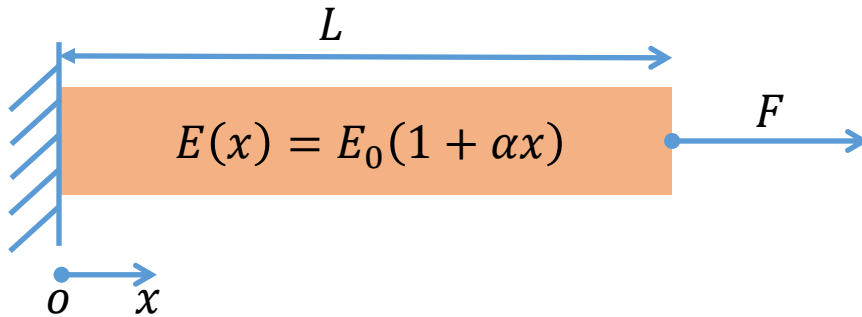


Somme des déplacements pour le déplacement total

$$\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3}{2} \frac{FL}{AE}$$

Exemple 3.6

Allongement d'une barre fait d'un alliage



$$N(x) = \text{constante} = F \rightarrow \sigma(x) = \frac{F}{A} = \text{constante}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma}{E(x)}; \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \rightarrow \delta = u(L) - u(0) = \int_0^L \varepsilon(x) dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{F}{AE(x)} dx = \frac{F}{A} \int_0^L \frac{dx}{E(x)} = \frac{F}{AE_0} \frac{\ln(1 + \alpha L)}{\alpha}$$

En analogie avec $N = \underbrace{\frac{AE}{L}}_{\mathbf{k}} \cdot \delta \longrightarrow k = AE_0 \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha L)} \neq \frac{AE}{L}$

Exemple 3.7

Effet de la gravité

Solution en utilisant la méthode de section
et l'équilibre eq. $\Sigma F=0$

ρ : densité en kg/m^3

$N(x) \neq \text{constant!!!}$

$$F - N(x) - \rho Ag(L - x) = 0$$

$$N(x) = F - \rho Ag(L - x)$$

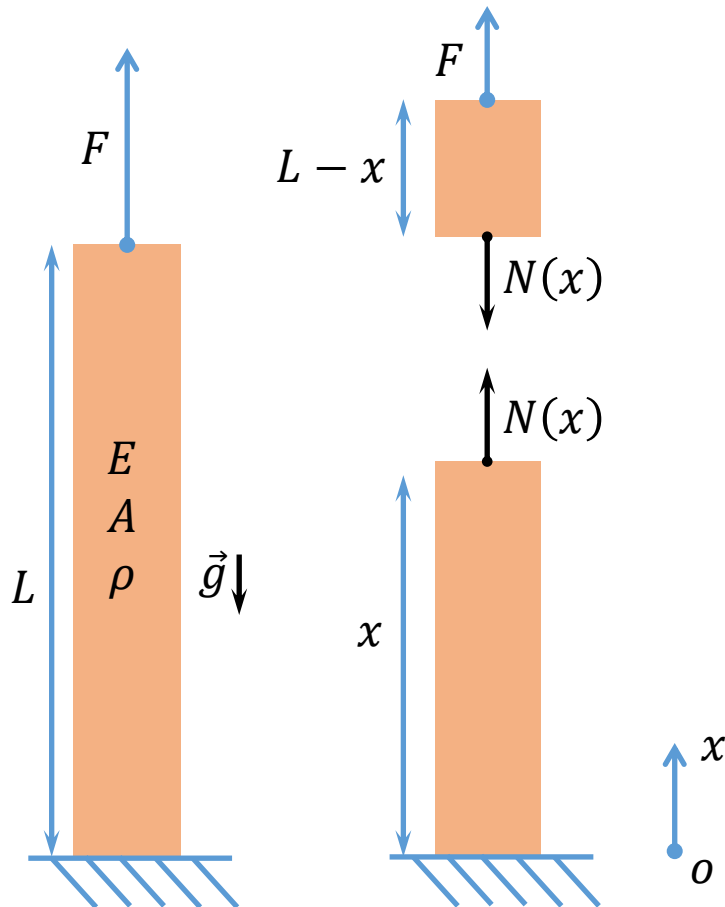
$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$$

$$\delta = u(L) - u(0) = \int_0^L \varepsilon(x) dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx = \frac{1}{AE} \int_0^L N(x) dx$$

$$\delta = \frac{1}{AE} \left(FL - \rho Ag \frac{L^2}{2} \right)$$

$k??$

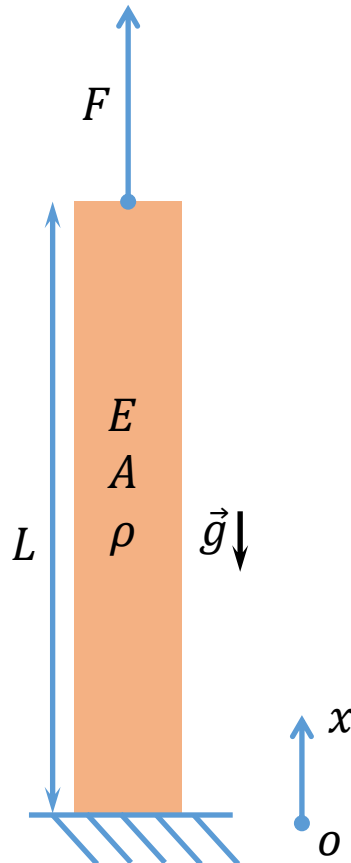


Exemple 3.7

Effet de la gravité

Solution en utilisant la définition de l'équilibre en 1D

ρ : densité en kg/m^3



$$\frac{dN(x)}{dx} + BA(x) = 0$$

$$B = -\rho g$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = \rho g A \rightarrow N(L) - N(x) = \int_x^L \rho g A dx = \rho g A (L - x)$$

$$N(x) = N(L) - \rho A g (L - x) = F - \rho A g (L - x)$$

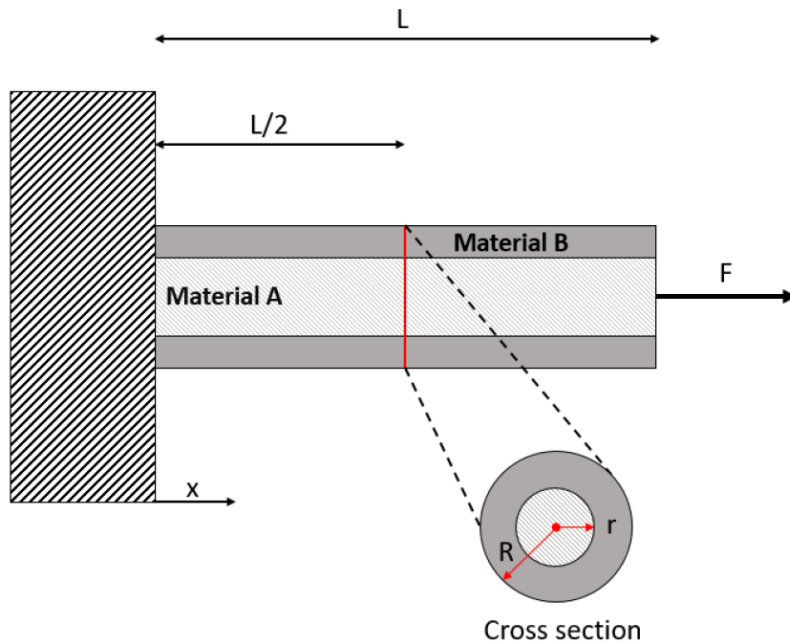
$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx = \frac{1}{AE} \int_0^L N(x) dx$$

$$\delta = \frac{1}{AE} \left(FL - \rho A g \frac{L^2}{2} \right)$$

$k??$

Force interne, N , est – elle la même dans les matériaux A et B?



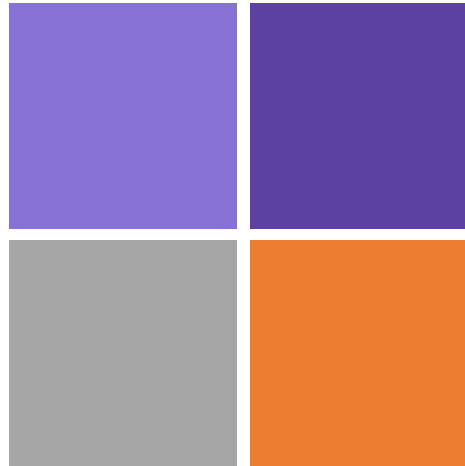
- A. Oui
- B. Non
- C. Ca dépend



Semaine 3

Partie III:

Effets thermiques



1. Effet thermique
2. Structures hyperstatiques

- Effet de la variation de température sur la contrainte et la déformation relative dans le matériau
- Comprendre ce qu'est un problème hyperstatique
- Résolution d'un système hyperstatique lorsqu'il y a une variation de température

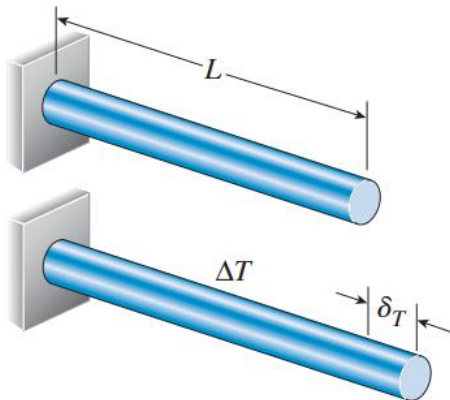
En général, les matériaux se dilatent avec une augmentation de la température (s'il n'y a pas de contraintes géométriques) et engendre une

Déformation relative thermique:

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

α est le **coefficient de dilatation thermique (linéaire)**

Il a les dimensions (mm/mm)/°C or °C⁻¹

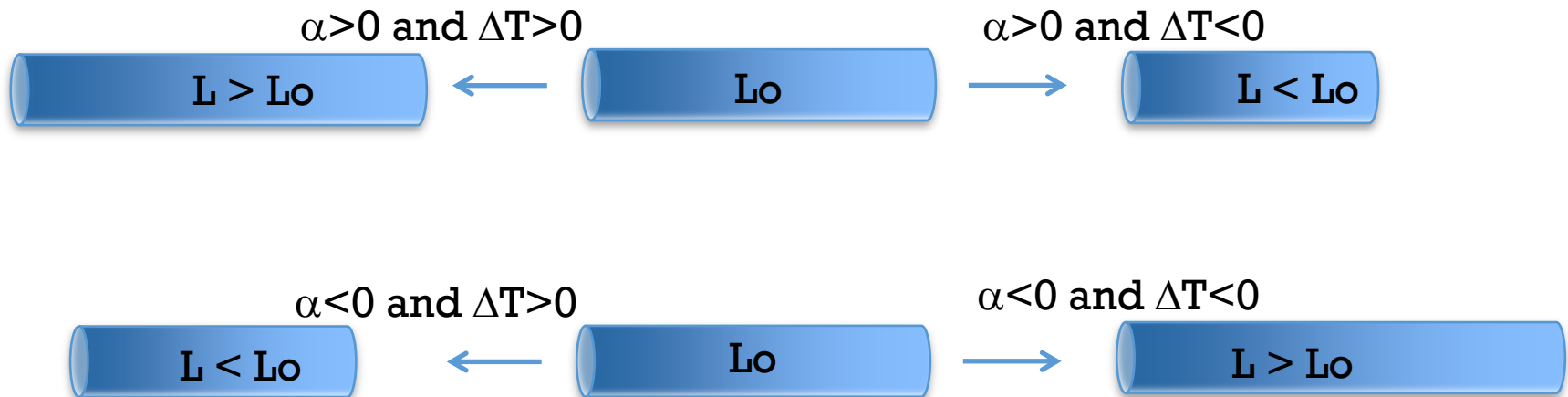


Equation Température – Déplacement

$$\delta_T = \epsilon_T L = \alpha(\Delta T)L$$

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

α est le coefficient de dilatation thermique (linéaire)



Déformation relative thermique

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0) = \alpha\Delta T$$

Une force est appliquée



Puis une variation de température

$$\alpha > 0 \text{ et } \Delta T > 0$$

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{\text{mech}, F} + \varepsilon_T \quad \text{avec } \varepsilon_{\text{mech}} = \sigma/E$$

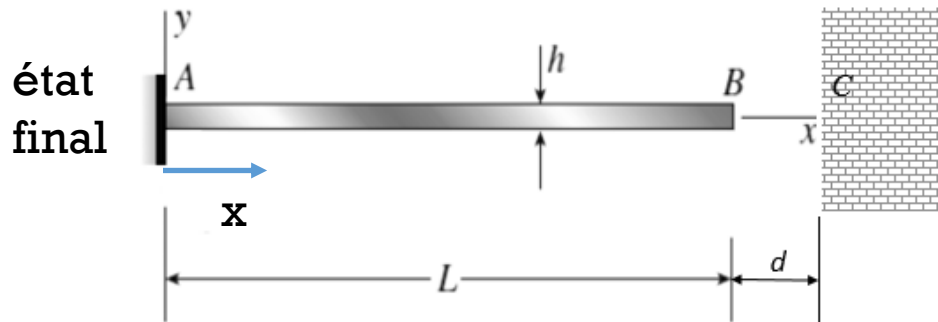
Déformations relatives thermiques peuvent être superposées aux déformations relatives normales

Barre déformée par la température

Une barre à -6°C touche un mur et la température est changée de façon à ce que la barre s'éloigne de 2 mm. **Quelle est la température de la barre une fois éloignée de “ $d=2\text{ mm}$ ” du mur ?**

$$d = 2\text{ mm}, L = 98\text{ mm}, h = 10\text{ mm}$$

$$E = 23\text{ GPa}, \alpha = -16 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$



A. -125°C

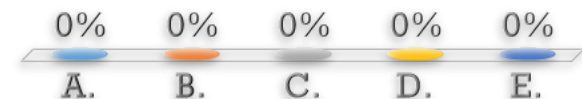
B. 119°C

C. 125°C

D. -131°C

E. Aucune de ces réponses

$$\varepsilon_t = \alpha \cdot \Delta T$$



Si la structure est restreinte, sa déformation n'étant pas possible, la déformation relative thermique résultera en une **contrainte "thermique"**:

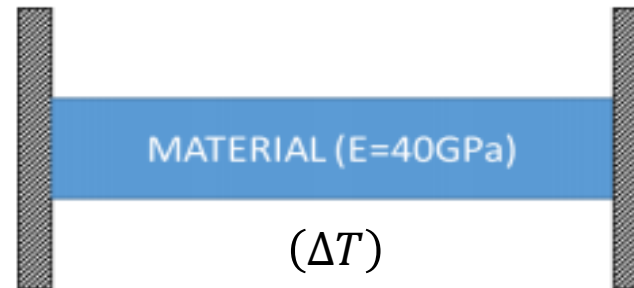
$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

$$\epsilon_{TOT} = \epsilon_{mech,T} + \epsilon_T$$

$$0 = \epsilon_{mech,T} + \epsilon_T$$

$$\epsilon_{mech,T} = -\epsilon_T = -\alpha(\Delta T)$$

$$\epsilon_{mech,T} = \frac{\sigma_{mech,T}}{E} = -\alpha(\Delta T)$$

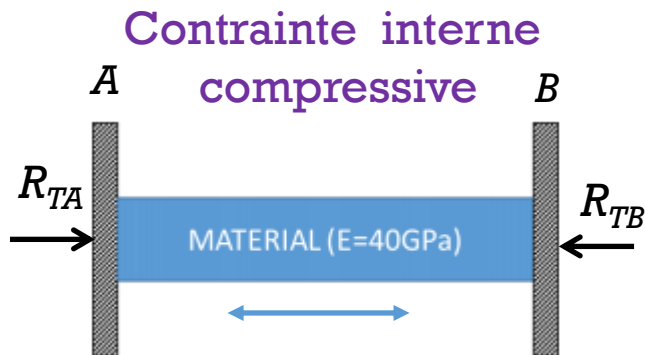


Le matériau veut se dilater ou se contracter mais les restrictions géométriques l'en empêchent: une force interne apparaît menant à une contrainte interne.

Contraintes "thermiques" peuvent être superposées aux contraintes normales

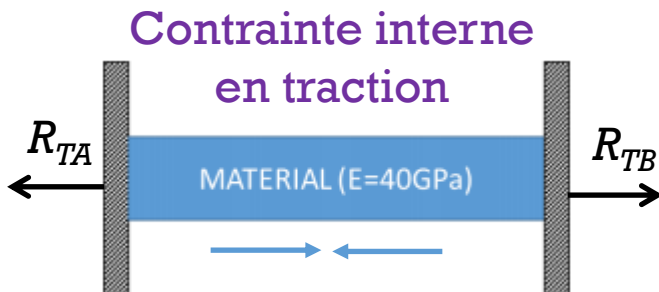
Effets thermiques

Si la structure est restreinte, la déformation relative thermique résultera en une **contrainte "thermique"**:



$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

delta T positif pour un α positif: barre en compression

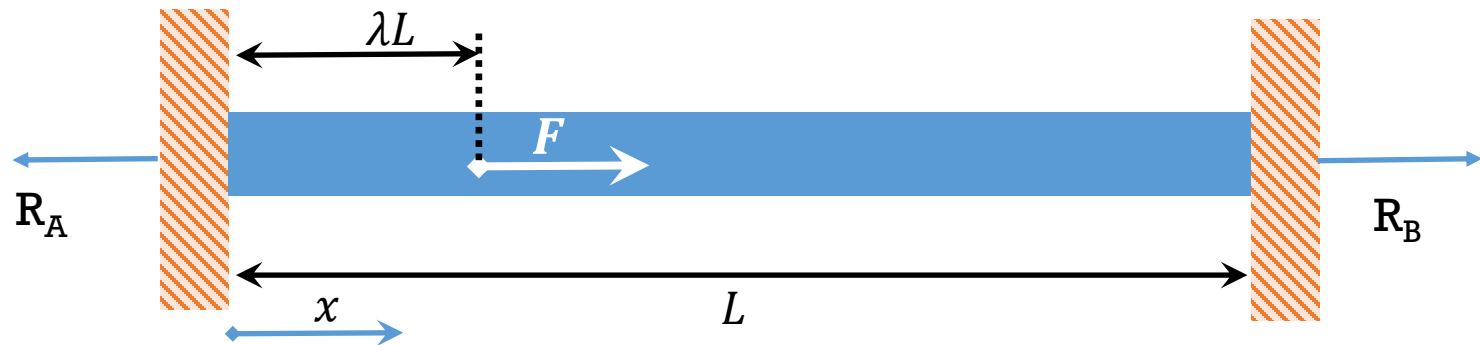


delta T négatif pour un α positif: barre en traction

Structure hyperstatique

Problème indéterminé

- Un système pour lequel les équations d'équilibre sont insuffisantes pour déterminer les réactions (plus d'inconnus que d'équations)
- Certains des supports ou charges sont redondants pour maintenir l'équilibre



$$\sum F_x = 0 = R_B + F - R_A$$

- **Hyperstatique** avec une force redondante: 2 inconnues pour une équation
- Il faut donc une **équation supplémentaire** pour résoudre un tel système

*Force redondante: Force en excès pour assurer l'équilibre

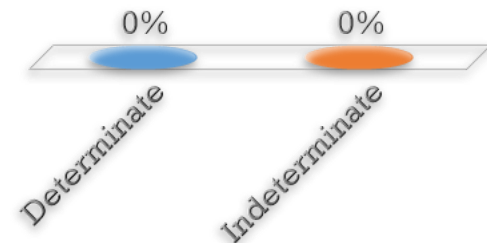
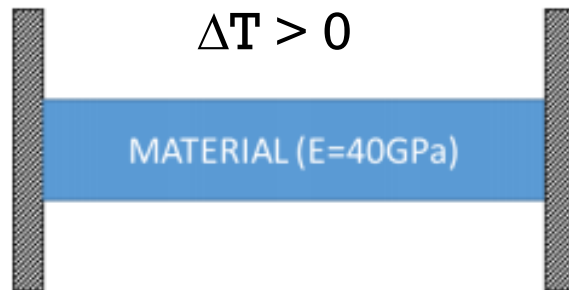
Barre fixée à ses deux extrémités

Effet d'une variation de température

- Une barre est fixée à ces deux extrémités à température ambiante. Elle est ensuite chauffée à une température plus élevée. (α est positif)

Est-ce un système déterminé ou indéterminé / hyperstatique ?

- A. Déterminé
- B. Indéterminé



Barre fixée à ses deux extrémités

Effet d'une variation de température

- Une barre prismatique AB de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Si la température de la barre est élevée de T ,

Donner:

- l'équation d'équilibre
- la réaction $\mathbf{R}_A$?
- la contrainte $\sigma_{\text{mech},T}$ développée dans la barre

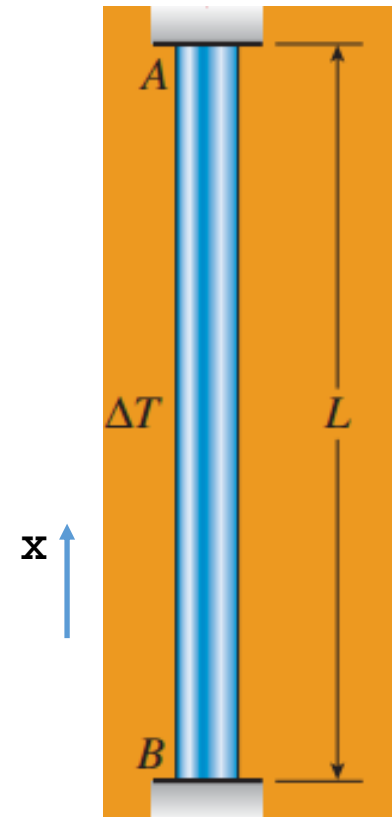
$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\text{Diamètre} = 1 \text{ cm}$$

$$\alpha = 20 \times 10^{-6}$$

$$\Delta T = 200^\circ\text{C}$$



Barre fixée à ses deux extrémités

Effet d'une variation de température

- Une barre prismatique AB de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Si la température de la barre est élevée de T ,

Donner:

- l'équation d'équilibre
- la réaction R_A ?
- la contrainte $\sigma_{\text{mech},T}$ développée dans la barre

$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$\text{Diamètre} = 1 \text{ cm}$$

$$\alpha = 20 \times 10^{-6}$$

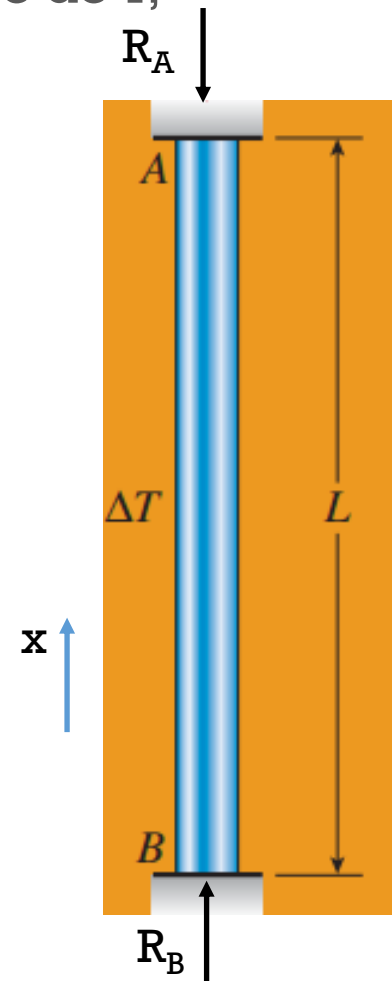
$$\Delta T = 200^\circ\text{C}$$

Equation d'équilibre

$$R_B - R_A = 0$$

Equation de compatibilité

$$\delta_{AB} = 0$$



Barre fixée à ses deux extrémités

100

Effet d'une variation de température

Déplacement dû à ΔT

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

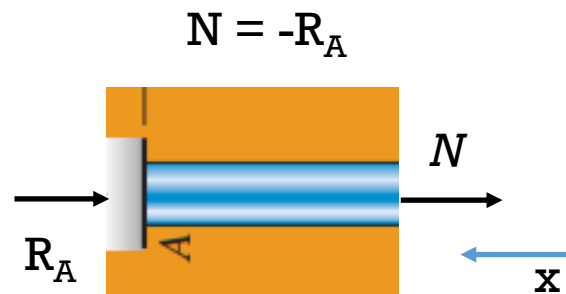
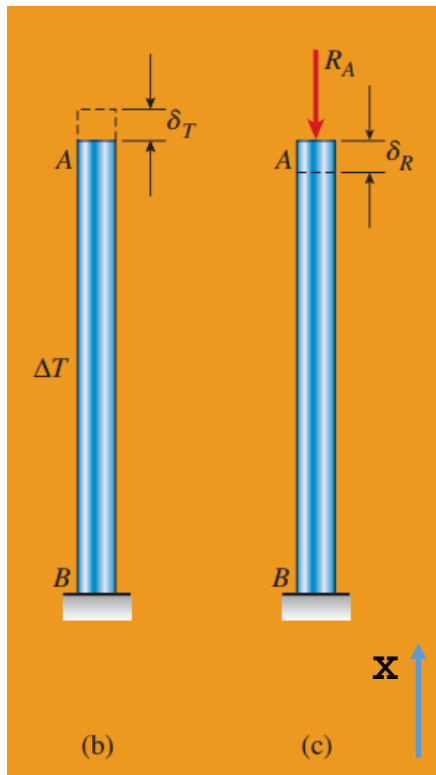
Déplacement dû à R_A

$$\delta_{RA} = -f_{AB} R_A \quad f_{AB} = L/AE$$

$$\text{Compatibilité } \delta_T + \delta_{RA} = 0$$

$$\alpha \Delta T L - f_{AB} R_A = 0$$

$$R_A = \alpha \Delta T L / f_{AB}$$



$$\sigma = N/A$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T L / A f_{AB}$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T L AE / AL$$

$$\sigma = -\alpha \Delta T E$$

Barre fixée à ses deux extrémités

101

Effet d'une variation de température

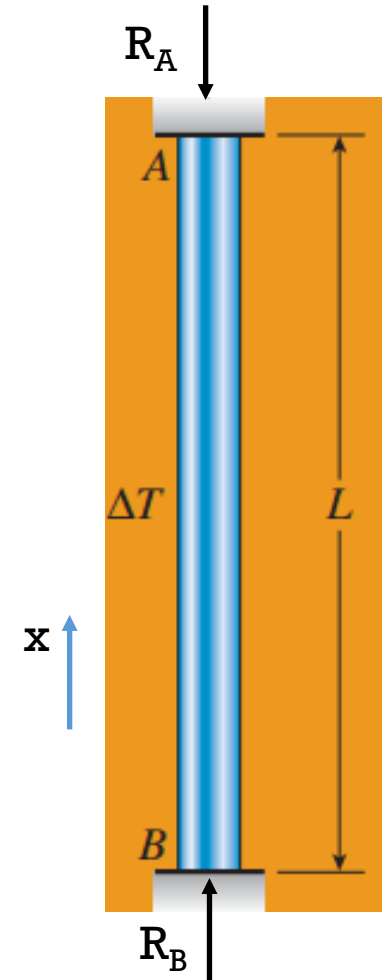
$$R_A = \alpha \Delta T L / f_{AB} \quad f_{AB} = L/AE$$

$$R_A = \alpha \Delta T E A$$

$$R_A = 31.4 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{mech},T} = -\alpha \Delta T E$$

$$\sigma_{\text{mech},T} = -400 \text{ MPa}$$



- Déformation relative thermique: $\varepsilon_T := \alpha \Delta T$

- Déformation thermique:

$$\delta_T = \epsilon_T L = \alpha(\Delta T)L$$

- Si le matériau veut se dilater ou se contracter mais les restrictions géométriques l'en empêchent: une force interne apparaît menant à une contrainte interne «thermique»:

$$\sigma_{mech,T} = -E\alpha(\Delta T)$$

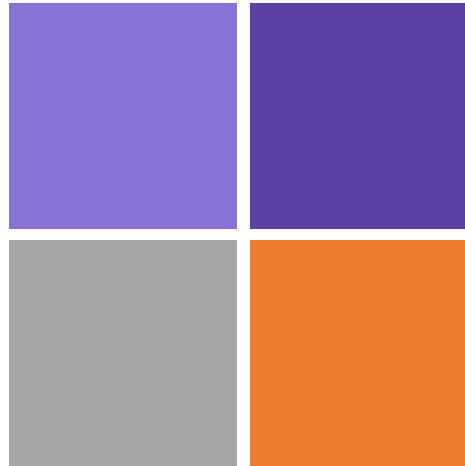
- Structure hyperstatique: Un système pour lequel les équations d'équilibre sont insuffisantes pour déterminer les réactions (plus d'inconnus que d'équations)

Il faut donc une équation supplémentaire pour résoudre un tel système: l'équation de compatibilité, fonction du système étudié

Semaine 3

Partie IV:

Densité d'énergie



1. Énergie de déformation relative
2. Résumé

- Comprendre le concept d'énergie de déformation relative
- Calculer l'énergie de déformation relative emmagasinée dans un matériau élastique lorsque déformé

Traitements des corps comme des ressorts:

Energie de déformation relative

- Nous pouvons maintenant appliquer cette analogie à l'énergie emmagasinée par un ressort ou une barre

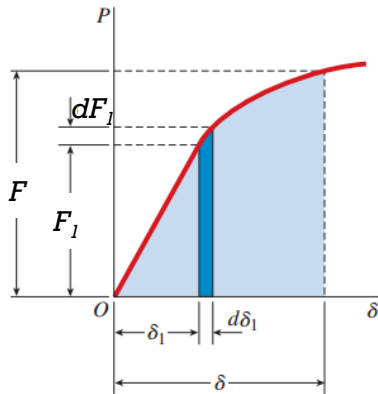
Pour A et E constants, nous pouvons écrire:

	Ressort	Barre axiale sous charge
Loi de Hooke	$F = k \cdot \Delta x$	$N = \frac{AE}{L} \cdot \delta$
Constante de ressort	k	$k = \frac{AE}{L}$

Energie de déformation relative en 1D

106

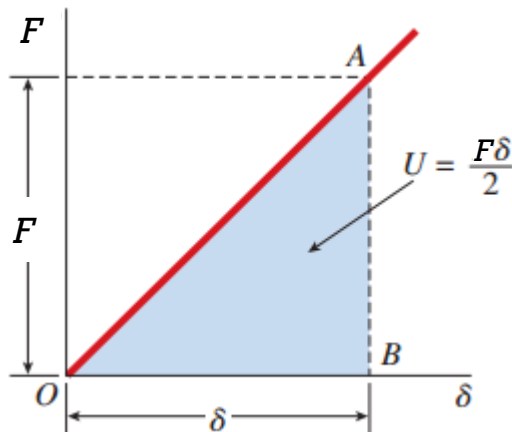
- L'Énergie de déformation relative est définie comme l'énergie absorbée par la barre lors de sa charge



Équation générale

$$U = W = \int_0^{\delta} F_1 d\delta_1 \quad (\text{J})$$

- Loi de Hooke: La courbe de charge Force - Déplacement est linéaire



$$U = F \delta / 2 \quad \text{et} \quad \delta = FL / EA$$

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

$$U = \frac{EA \delta^2}{2L}$$

$$U = \frac{F^2}{2k}$$

$$U = \frac{k \delta^2}{2}$$

En Joules

Energie de déformation relative en 1D

107

Densité d'énergie de déformation relative

- De la loi de Hooke nous savons qu'un matériau solide réagit de manière similaire à un ressort. L'énergie emmagasinée par un ressort est:

$$U_{spring} = \int_0^x F_s dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

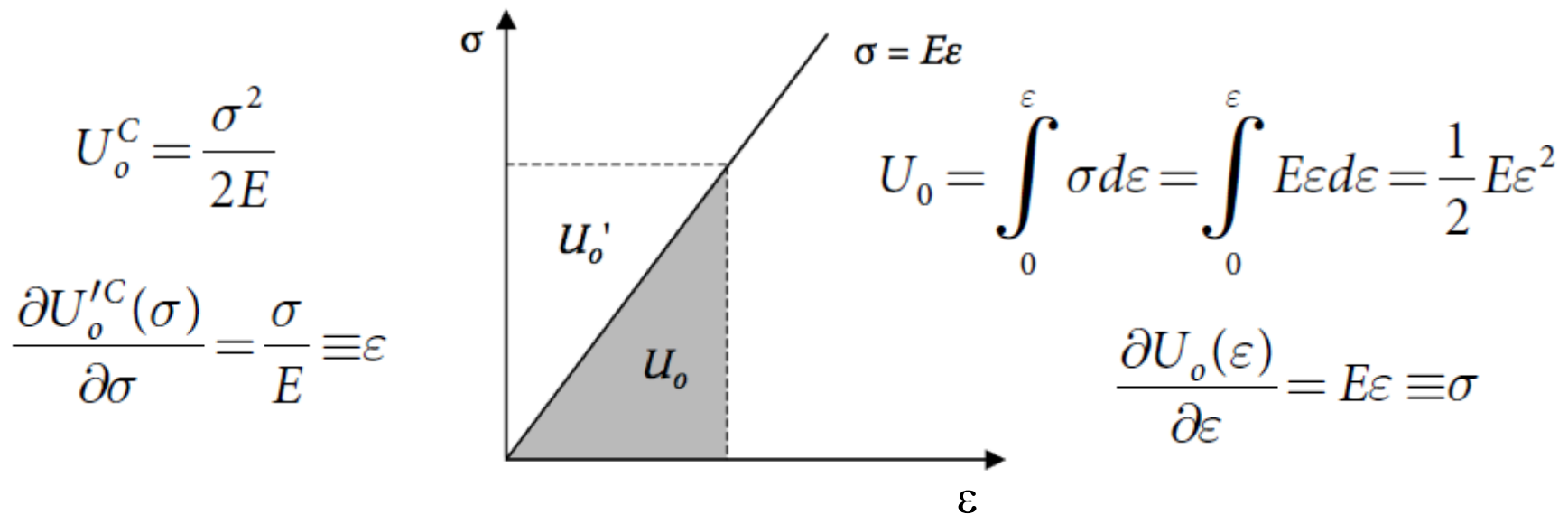
- Par analogie, l'Energie de déformation relative dans un solide élastique (**l'énergie de déformation relative par unité de volume, la densité d'énergie de déformation relative**) est:

$$U_0 = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \quad (\text{J/m}^3)$$

Energie de déformation relative en 1D

Aire de la courbe Contrainte – Déformation relative

- Aire sous la courbe Contrainte-Déformation relative:
Densité d'énergie de déformation relative (U_o : J/m³)
- Aire “sur” la courbe Contrainte-Déformation relative :
Densité d'énergie complémentaire (U_o' : J/m³)

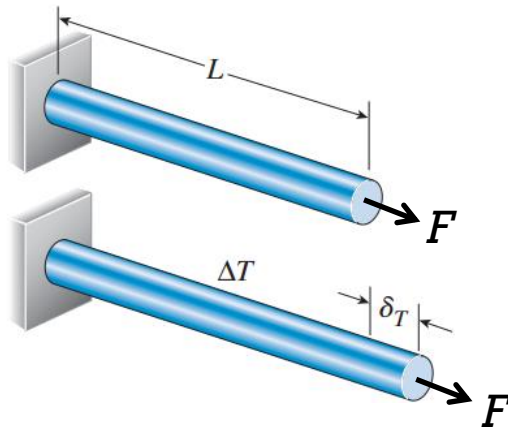


Energie de déformation relative en 1D

109

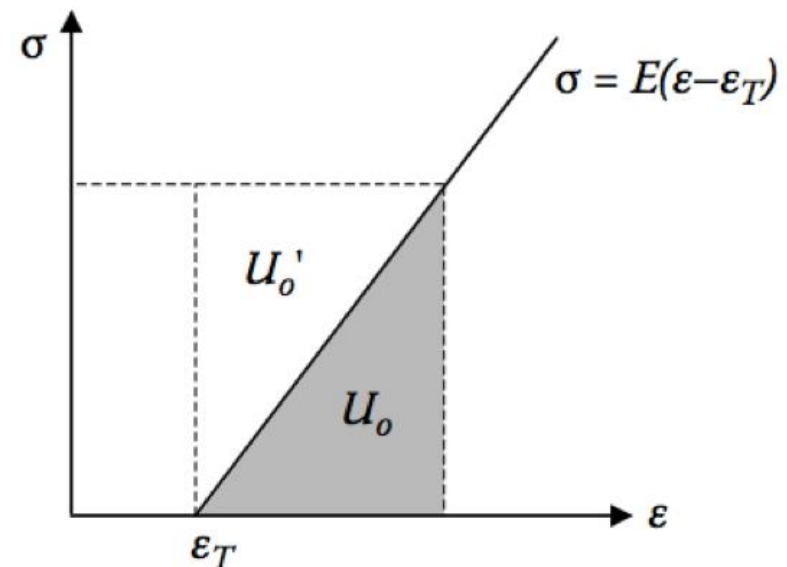
Energie de déformation relative et température

- Déformation relative thermique crée un décalage dans la courbe σ vs. ε
 - Energie de déformation relative due à une charge externe F
 - Barre libre: Déformation relative thermique, pas de contrainte (aucune force interne ne s'oppose à sa dilatation)
 - **Barre libre: une variation de température ne change pas son énergie**



U_0 / Aire restent les mêmes que sans la composante thermique

U_0 est la densité d'énergie de déformation relative J/m^3



Energie de déformation relative en 1D

110

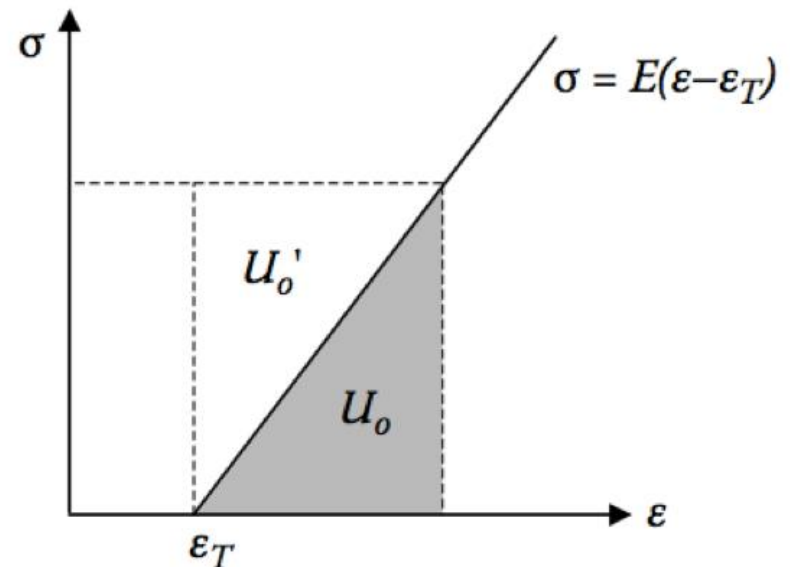
Energie de déformation relative et température

- Déformation relative thermique crée un décalage dans la courbe σ vs. ϵ

$$U_0 = \int_{\epsilon_T}^{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_{\epsilon_T}^{\epsilon} E(\epsilon - \epsilon_T) d\epsilon = \frac{1}{2} E(\epsilon - \epsilon_T)^2$$

U_0 / Aire restent les mêmes que sans la composante thermique

U_0 est la densité d'énergie de déformation relative J/m^3



Example 3.8

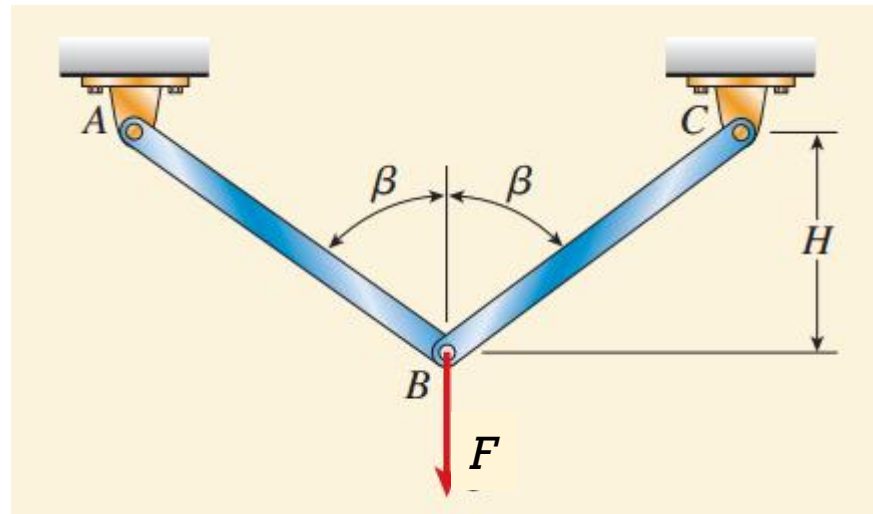
111

Déformation à partir de l'énergie de déformation relative

Déterminer la déformation verticale δ_B du joint B de cette charpente.

Charge F appliquée au joint B.

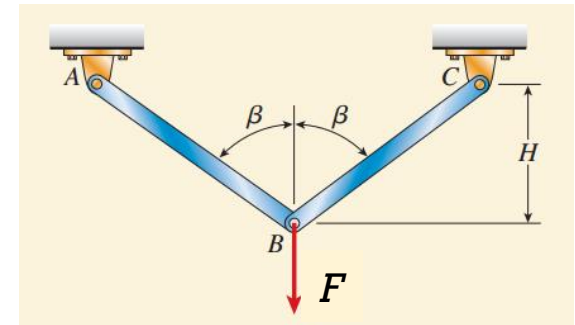
Note: Barres avec la même rigidité axiale.



Example 3.8

Déformation à partir de l'énergie de déformation relative

Déplacement du point B est déterminé en utilisant l'équilibre et l'énergie de déformation relative



$$U = W \quad W = \frac{F\delta}{2} \quad U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

Force axiale sur une barre: $F_{axiale} = \frac{F}{2 \cos \beta}$ Longueur de la barre: $L = \frac{H}{\cos \beta}$

Pour 2 barres: $U = \frac{2F^2 L}{2EA} = \frac{1}{EA} \times \frac{F^2}{4 \cos^2 \beta} \times \frac{H}{\cos \beta} = \frac{F^2 H}{4 EA \cos^3 \beta}$

$$U = W \quad \frac{F\delta}{2} = \frac{F^2 H}{4 EA \cos^3 \beta}$$

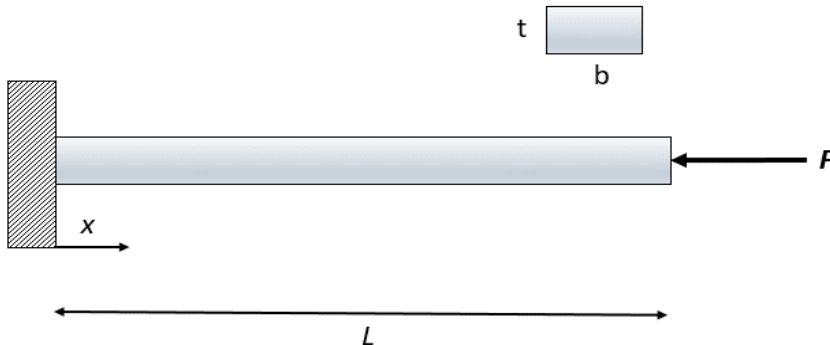
$$\delta = \frac{FH}{2EA \cos^3 \beta}$$

Densité d'énergie de déformation relative: U_0 ?

On applique une force F à l'extrémité libre. La température initiale est de $T_0 = 20^\circ\text{C}$, puis elle est augmentée jusqu'à atteindre $T_f = 120^\circ\text{C}$. Après chauffage, l'élongation due à la force F calculée à l'extrémité libre de la barre est de 0 (i.e. $\delta(L) = 0$). **Calculer U_0 .**

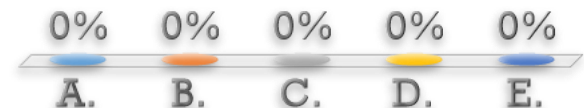
$$E = 200 \text{ GPa} \quad \alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$L = 0.5 \text{ m} \quad t = 0.01 \text{ m} \quad b = 0.03 \text{ m}$$



$$U_0 = \frac{1}{2} E (\varepsilon_{TOT} - \varepsilon_T)^2$$

- A. 100 kPa
- B. 200 kJ
- C. 0
- D. 100 kJ
- E. 200 kPa

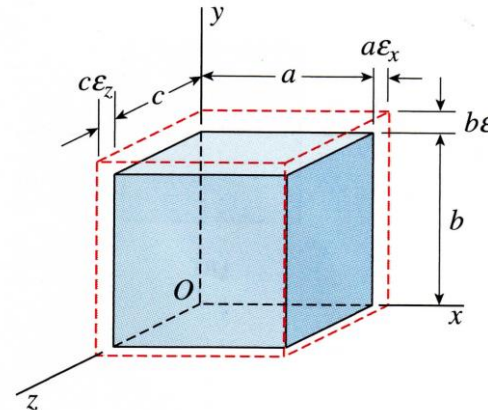
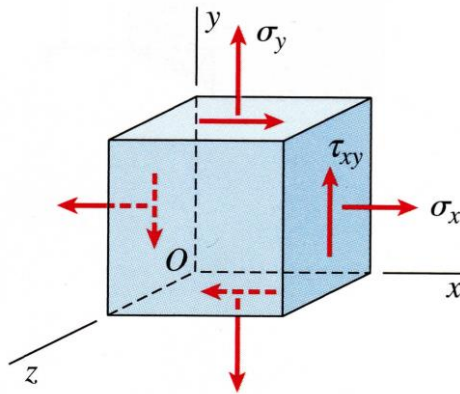


Energie de déformation relative 2D

115

Contraintes dans le plan

- Regardons le cas de Contraintes dans le plan:



$$W = \int_{\delta_i} F_i d\delta_i \quad \text{if linear} \equiv \text{elastic} \quad \frac{1}{2} F_i \delta_i$$

- En calculant le travail des composantes individuelles des contraintes normales et de cisaillement, la densité d'énergie de déformation relative est:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

Contraintes dans le plan

- En reformulant selon les composants de contrainte ou de déformation relative: la densité d'énergie de déformation relative:

$$u_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

$$u_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}$$

- Important: Ces formules ont été dérivées que pour l'état de contraintes dans le plan!

Energie de déformation relative en 3D

117

Formule générale en 3D

- Formule complète en 3D pour la Densité d'énergie de déformation relative:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

Quel cas est le plus efficace énergétiquement ?

- A. Contraintes dans le plan
- B. Déformations relatives dans le plan

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$



Densité d'énergie de déformation relative: U_0 ?

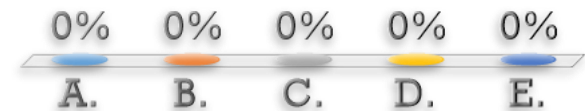
Soit une plaque (un cas de déformation relative dans le plan selon l'axe z)
chargée selon les matrices de contrainte et de déformation relative suivantes.

Calculer U_0 .

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

- A. 650 J/m³
- B. 800 J/m³
- C. 1400 J/m³
- D. 700 J/m³
- E. 1300 J/m³



Résumé Partie 4

122

Densité d'énergie de déformation relative

- Energie de déformation relative en 1D (J)

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

$$U = \frac{EA\delta^2}{2L}$$

- Densité d'énergie de déformation relative (J/m³)

$$U_0 = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2, \quad U_0 = \int_{\varepsilon_T}^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_{\varepsilon_T}^\varepsilon E(\varepsilon - \varepsilon_T) d\varepsilon = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon_T)^2$$

- Densité d'énergie de déformation relative en 3D (J/m³)

$$u_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$